Feuille d'exercices n°25

Séries numériques

Exercice 1 : *Somme d'une série numérique convergente*

Dans chaque cas, montrer que la série $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme :

$$\text{a) } u_n = 2^{n+1}3^{2-n}\,; \qquad \text{b) } u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Correction : a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1}3^{2-n} = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $0 < \frac{2}{3} < 1$.

Donc $\boxed{\sum u_n \text{ est une série géométrique convergente}}$, de somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} 18\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{18}{1-\frac{2}{3}} \boxed{= 54}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 - \frac{1}{n^2} > 0 \Longleftrightarrow n^2 > 1 \underset{n>0}{\Longleftrightarrow} n > 1$.

De plus, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \ln(n-1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n)$.

Donc, pour tout entier $N \geq 2$, la somme partielle d'ordre N est

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^{N} [\ln(n-1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n)] \\ &\underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{n=2}^{N} [\ln(n-1) - \ln(n)] + \sum_{n=2}^{N} [\ln(n+1) - \ln(n)] \\ &\underset{\text{télescopage}}{=} \ln(1) - \ln(N) + \ln(N+1) - \ln(2). \end{aligned}$$

Donc $S_N = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) - \ln(2) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2)$.

Donc $\boxed{\sum_{n\geq 2} u_n \text{ converge et a pour somme } S = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)}$.

Exercice 2 : *Somme d'une série numérique convergente-bis*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \arctan\left(\frac{2n}{n^4 + n^2 + 2}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Correction : On pose $x_n = \dfrac{2n}{n^4+n^2+2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^4+n^2+2 \geq 2 > 0$ et

$$x_n \sim \frac{2n}{n^4} = \frac{2}{n^3} \longrightarrow 0.$$

Donc $u_n = \arctan(x_n) \sim x_n \sim \dfrac{2}{n^3} > 0$.

$3 > 1$ donc $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est une série de Riemann qui converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge}}$.

2. Montrer que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$.

Correction : Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$0 \leq \arctan(a) < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \arctan(b) < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan(a) - \arctan(b) < \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\tan\left(\arctan(a) - \arctan(b)\right)\right)$, avec

$$\tan\left(\arctan(a) - \arctan(b)\right) = \frac{\tan(\arctan(a)) - \tan(\arctan(b))}{1 + \tan(\arctan(a))\tan(\arctan(b))} = \frac{a-b}{1+ab},$$

par les formules d'addition.

Donc, $\boxed{\text{pour tout } (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^4 + n^2 + 1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n^2+n+1)(n^2-n+1) = n^4 - n^3 + n^2 + n^3 - n^2 + n + n^2 - n + 1 = n^4 + n^2 + 1.$$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad n^4+n^2+1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)}$.

4. En déduire la somme de la série de terme général u_n.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2+n+1 > 0$ et $n^2 - n + 1 = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, donc

$$u_n = \arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right) \underset{3.}{=} \arctan\left(\frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{1+(n^2+n+1)(n^2-n+1)}\right) \text{ et}$$

$$u_n \underset{2.}{=} \arctan(n^2+n+1) - \arctan(n^2-n+1) = \underbrace{\arctan(n(n+1)+1)}_{v_{n+1}} - \underbrace{\arctan(n(n-1)+1)}_{=v_n}.$$

Donc, pour tout entier N, on a

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N}(v_{n+1} - v_n) \underset{\text{télescopage}}{=} \arctan(N(N+1)+1) - \arctan(1) \underset{n\to}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $\boxed{\text{la somme de la série } \sum u_n \text{ est } S = \sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\dfrac{2n}{n^4+n^2+2}\right) = \dfrac{\pi}{4}}$.

Exercice 3 : *Comparaison suite-série*

Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}.\left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)^n$ converge vers un réel $C > 0$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \ln(u_n) = \ln(n!) + \ln(\mathrm{e}^n) - \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n).$$

Montrons que $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln(n+1) + 1 - \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)[\ln(n+1) - \ln(n)] \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$ donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim -\frac{1}{12n^2} < 0. \end{aligned}$$

$2 > 1$ donc la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann qui converge.

Par comparaison de séries à termes négatifs équivalents, la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge.

Par comparaison suite-série, la suite (v_n) converge vers un réel ℓ.

$u_n = \mathrm{e}^{v_n}$ donc, par composition, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers un réel } C = \mathrm{e}^{\ell} > 0}$.

Remarque : on en déduit que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Á l'aide des intégrales de Wallis, on montre que $C = \sqrt{2\pi}$ (formule de Stirling).

Exercice 4 : *Comparaison série-intégrale*

Montrer que : a) $\ln(n!) \sim n\ln(n)$; b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$.

Correction : a) Soit un en tier $n \geq 2$. On a $\ln(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

ln est continue, positive et croissante sur $[1, +\infty[$ donc, $\forall k \geq 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(x)\mathrm{d}x \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(x)\mathrm{d}x$.

Par sommation de ces inégalités et la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leq \int_{2}^{n+1} \ln(x)\mathrm{d}x$.

Donc $n\ln(n) - n + 1 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln(2) + 2$, car $\ln(1) = 0$.

Donc $n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n\ln(n) + \ln(n) + (n+1)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + 1 - \ln(4)$.

Donc $1 - \dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{n\ln(n)} \leq \dfrac{\ln(n!)}{n\ln(n)} \leq 1 + \dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{n\ln(n)}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1 - \ln(4)}{n\ln(n)}$.

Donc, par opérations sur les limites, composition et encadrement, on a $\boxed{\ln(n!) \sim n\ln(n)}$.

b) Soit un entier $n \geq 3$. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$.

Donc pour tout entier $k \geq 3$, on a $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$.

Par sommation de ces inégalités et la relation de Chasles, on a

$$\int_{3}^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x.$$

De plus, $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = \ln(\ln(x)) + C$ sur $[2, +\infty[$ car $\ln(x) > 0$. Donc

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) + \frac{1}{2\ln(2)} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

et $\ln(\ln(n+1)) = \ln\left(\ln(n) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln(\ln(n)) + \ln\left(1 + \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \sim \ln(\ln(n))$,

car $\ln(\ln(n)) \longrightarrow +\infty$ et $\ln\left(1 + \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \longrightarrow 0$, par opérations sur les limites et composition.

Donc, par encadrement, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$.

Exercice 5 : *Étudier la nature d'une série*

Dans chaque cas, étudier la nature de la série de terme général u_n :

1. a) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$; b) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; c) $u_n = \sqrt{\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1}$;

Correction : a) Pour $n \geq 2$, $1 - \dfrac{1}{n^2} > 0$ et $u_n = \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$.

$-\dfrac{1}{n^2} \longrightarrow 0$ donc $n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \sim n \times \dfrac{-1}{n^2} = -\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$.

Donc $u_n \longrightarrow \mathrm{e}^0 = 1 \neq 0$ et donc la série $\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$.

b) Pour $n \geq 2$, $1 - \dfrac{1}{n} > 0$ et $u_n = \mathrm{e}^{n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$.

$-\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$ donc $n^2 \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = n^2 \times \left(-\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = -n - \dfrac{1}{2} + o(1)$.

Donc $u_n = \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+o(1)}$, avec $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+o(1)} \sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. Donc $u_n \sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n > 0$.

$0 < \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$ donc la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ converge.

Par comparaison de séries à termes positifs équivalents, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge}}$.

c) $\mathrm{ch}\,(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$ donc $\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc $\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim \dfrac{1}{2n^2}$ et $u_n \sim \dfrac{1}{n\sqrt{2}} > 0$. De plus, La série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Par comparaison de séries à termes positifs équivalents, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$.

2. a) $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}$; b) $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$; c) $u_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{\mathrm{e}^n}$.

Correction : a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 \leq |u_n| \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

$\dfrac{3}{2} > 1$ donc la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\boxed{\sum u_n \text{ est absolument convergente et donc convergente}}$.

b) D'après l'exercice 4 b), $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln(n)} \underset{N \to +\infty}{\sim} \ln(\ln(N)) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\boxed{\sum \dfrac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge}}$.

Remarque : $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est définie, continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$ et

$$\int_2^x f(t)\mathrm{d}t = [\ln(|\ln(t)|)]_2^x = \ln(|\ln(x)|) - \ln(|\ln(2)|) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par comparaison série-intégrale, $\boxed{\sum \dfrac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $n^2|u_n| = \dfrac{n^4}{\mathrm{e}^n} \longrightarrow 0$, par croissance comparée.

Donc $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. De plus, $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann (à termes positifs) qui converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ est absolument convergente, donc convergente}}$.

Exercice 6 : *Terme général défini par une intégrale*

Étudier la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{n^2 + \cos^2(x)} \mathrm{d}x$;

   Correction : Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$ donc $0 \leq \dfrac{\cos^2(x)}{n^2 + \cos^2(x)} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

   Par positivité et croissance de l'intégrale, on a $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 0\right) = \dfrac{\pi}{2n^2}$.

   $2 > 1$ donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et, par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

2. $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3(x)}{1 + x} \mathrm{d}x$.

   Correction : Soit un entier $n \geq 2$. On a $0 < \dfrac{\pi}{n} \leq \dfrac{\pi}{2}$.

   Donc $x \longmapsto \sin^3(x)$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{n}\right]$, comme composée de deux fonctions croissantes.

   Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$, on a $0 = \sin^3(0) \leq \sin^3(x) \leq \sin^3\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ et $1 \leq 1 + x \leq 1 + \dfrac{\pi}{n}$

   donc $\dfrac{1}{1 + \frac{\pi}{n}} \leq \dfrac{1}{1 + x} \leq 1$ et $0 \leq \dfrac{\sin^3(x)}{1 + x} \leq \dfrac{\sin^3\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1}$, car tout est positif.

   Par positivité et croissance de l'intégrale, on a $0 \leq u_n \leq \sin^3\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\left(\dfrac{\pi}{n} - 0\right) = \dfrac{\pi}{n}\sin^3\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

   $\dfrac{\pi}{n} \longrightarrow 0$ et $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ donc $\dfrac{\pi}{n}\sin^3\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \sim \dfrac{\pi^4}{n^4} > 0$.

   $4 > 1$ donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^4}$ converge.

   Par comparaisons de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{\pi}{n}\sin^3\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ converge et donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

Exercice 7 : *Développement en série entière*

1. Montrer que pour tout réel x, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ est absolument convergente.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $2^n \left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right| = \frac{|\sqrt{2}x|^{2n}}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparée ou opérations sur les limites.

Donc $\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$. De plus, la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge ($0 < \frac{1}{2} < 1$).

Par comparaisons de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \text{ est absolument convergente}}$.

Remarque : De même $n^2|u_n| \to 0$ par croissances comparées donc $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum |u_n|$ converge, par comparaison de séries à termes positifs.

2. Montrer que pour tout réel x, $\quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$.

Correction : $\cos \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(k)}(0) = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } \quad k = 2n \\ 0 & \text{si } \quad k = 2n+1 \end{cases}$.

Par la formule de Taylor avec reste intégral (en 0), on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \left|\cos(x) - \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}}_{\text{de degré } 2N}\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2N}}{(2N)!}\cos^{(2N+1)}(t)\mathrm{d}t\right|.$$

Si $x \geq 0$: Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2N}}{(2N)!}\cos^{(2N+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \left|\frac{(x-t)^{2N}}{(2N)!}\cos^{(2N+1)}(t)\right|\mathrm{d}t = \int_0^x \underbrace{\frac{(x-t)^{2N}}{(2N)!}}_{\geq 0}\underbrace{\left|\cos^{(2N+1)}(t)\right|}_{\leq 1}\mathrm{d}t.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2N}}{(2N)!}\cos^{(2N+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2N}}{(2N)!}\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{2N+1}}{(2N+1)!}\right]_0^x = \frac{x^{2N+1}}{(2N+1)!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissance comparée ou opérations sur les limites.

Si $x < 0$: $\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2N}}{(2N)!}\cos^{(2N+1)}(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^0 \frac{(x-t)^{2N}}{(2N)!}\cos^{(2N+1)}(t)\mathrm{d}t\right|$.

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\int_x^0 \frac{(x-t)^{2N}}{(2N)!}\cos^{(2N+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^0 \left|\frac{(x-t)^{2N}}{(2N)!}\cos^{(2N+1)}(t)\right|\mathrm{d}t = \int_x^0 \underbrace{\frac{(t-x)^{2N}}{(2N)!}}_{\geq 0}\underbrace{\left|\cos^{(2N+1)}(t)\right|}_{\leq 1}\mathrm{d}t.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{2N}}{(2N)!}\cos^{(2N+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^0 \frac{(t-x)^{2N}}{(2N)!}\mathrm{d}t = \left[\frac{(t-x)^{2N+1}}{(2N+1)!}\right]_x^0 = \frac{(-x)^{2N+1}}{(2N+1)!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissance comparée ou opérations sur les limites.

Dans tous les cas, $\left|\cos(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par encadrement.

Donc $\boxed{\text{pour tout réel } x, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}}$.

Exercice 8 : *Terme général défini par une somme*

On étudie la série $\sum \frac{u_n}{n^2}$, où $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$.

1. Déterminer, à l'aide d'une I.P.P., un équivalent simple de $\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$.

   Correction : Soit un entier $n \geq 2$ fixé. On pose $u(t) = t$ et $v(t) = \ln^2(t)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[1, n]$ et $\forall t \in [1, n]$, on a : $u'(t) = 1$ et $v'(t) = 2 \times \frac{1}{t} \times \ln(t)$.

   Par intégration par parties et linéarité de l'intégrale, on a :

   $\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t = \left[t\ln^2(t)\right]_1^n - 2\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t = n\ln^2(n) - 2\left(n\ln(n) - n + 1\right)$.

   Donc $\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t = n\ln^2(n)\left[1 - \frac{2}{\ln(n)} + \frac{2}{\ln^2(n)} - \frac{2}{n\ln^2(n)}\right] \underset{+\infty}{=} n\ln^2(n)(1 + o(1))$,

   car $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{2}{\ln(n)} + \frac{2}{\ln^2(n)} - \frac{2}{n\ln^2(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par opérations sur les limites.

   Donc $\boxed{\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)}$.

2. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

   Correction : Soit un entier $n \geq 2$ fixé.

   $f : t \mapsto \ln^2(t)$ est continue, positive et croissante sur $[1, +\infty[$ donc

   $$\forall k \geq 2, \quad \int_{k-1}^{k} \ln^2(t)\mathrm{d}t \leq \ln^2(k) \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t.$$

   Par sommation de ces inégalités et la relation de Chasles, on a

   $$\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \ln^2(k) \leq \int_2^{n+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t - \int_1^2 \ln^2(t)\mathrm{d}t.$$

   D'après les résultats de la question 1., on a : $\int_1^2 \ln^2(t)\mathrm{d}t = 2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2$,

   $\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$ et $\int_1^{n+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} (n+1)\ln^2(n+1) \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$,

   car $n + 1 \underset{+\infty}{\sim} n$ et $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

   De plus, $n\ln^2(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(1) = 0$, donc $\boxed{u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln^2(k) \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)}$, par encadrement.

3. Conclure sur la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{n^2}$.

Correction : On en déduit que $\dfrac{u_n}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n)}{n}$.

De plus, $\forall n \geq 3$, $\dfrac{\ln^2(n)}{n} \geq \dfrac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Par comparaisons de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{\ln^2(n)}{n}$ diverge et donc $\boxed{\sum \dfrac{u_n}{n^2} \text{ diverge}}$.

Exercice 9 : *Série alternée*

Soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

1. Montrer que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.

   Correction : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_{2(N+1)} - S_{2N} = S_{2N+2} - S_{2N} = \frac{(-1)^{2N+1}}{(2N+1)^\alpha} + \frac{(-1)^{2N+2}}{(2N+2)^\alpha} = -\frac{1}{(2N+1)^\alpha} + \frac{1}{(2N+2)^\alpha} \underset{\alpha>0}{\leq} 0,$$

$$S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} = S_{2N+3} - S_{2N+1} = \frac{(-1)^{2N+2}}{(2N+2)^\alpha} + \frac{(-1)^{2N+3}}{(2N+3)^\alpha} = \frac{1}{(2N+2)^\alpha} - \frac{1}{(2N+3)^\alpha} \underset{\alpha>0}{\geq} 0,$$

$$|S_{2N+1} - S_{2N}| = \left|\frac{(-1)^{2N+1}}{(2N+1)^\alpha}\right| = \frac{1}{(2N+1)^\alpha} \longrightarrow 0.$$

   Donc (S_{2N}) est décroissante, (S_{2N+1}) est croissante et $S_{2N+1} - S_{2N} \longrightarrow 0$.

   Donc $\boxed{\text{les suites } (S_{2N}) \text{ et } (S_{2N+1}) \text{ sont adjacentes}}$.

2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

   Correction : Par le théorème des suites adjacentes, (S_{2N}) et (S_{2N+1}) convergent et ont la même limite $S \in \mathbb{R}$.

   On en déduit que (S_N) converge vers S. Donc $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge}}$.

3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ diverge.

   Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha} \longrightarrow 0$ donc

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{=u_n} \underbrace{- \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{=v_n},$$

   où $v_n \sim \dfrac{-1}{2n^{2\alpha}} < 0$. De plus, $\alpha < \dfrac{1}{2}$ donc la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ diverge.

   Par comparaison de séries à termes négatifs équivalents, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

$\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = u_n + v_n$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge, donc

$\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \text{ diverge}}$.

Remarque : Si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors $2\alpha > 1$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge.

Dans ce cas, par comparaison de séries à termes négatifs équivalents, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge.