Colle n°9 - semaine du 18 au 24 novembre 2024

Format possible

– question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations de ce programme** ;

– application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

– exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°5 : Compléments d'algèbre linéaire [cours] [TD]

1 Espaces vectoriels et familles de vecteurs (à réviser)

2 Applications linéaires et matrices

2.1 Généralités sur les applications linéaires

Application linéaire $f : E \mapsto F$, endomorphisme, forme linéaire, image du vecteur nul et d'une combinaison linéaire, image et noyau de f, ensemble des solutions de $f(x) = b$, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont s.e.v. de E et F (resp.), caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité par l'image et le noyau (resp.) ; linéarité de $f + \lambda g$, de $g \circ f$, de f^{-1} (si f bijective), distributivité de la composition à gauche ou a droite, $\mathscr{L}(E, F)$ est un e.v., puissances d'un endomorphisme, isomorphisme, espaces isomorphes, automorphisme, groupe linéaire de E.

2.2 Application linéaire sur un espace de dimension finie

Génération de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ (et de $\text{Im}(f)$) par l'image d'une base de E, caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité par l'image d'une base, E et F isomorphes ssi $\dim(E) = \dim(F)$, si $\dim(E) = \dim(F)$ alors $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective ssi f est injective ssi f est surjective, cas des endomorphismes ; rang de f, majoration du rang de f, du rang d'une composée, le rang est inchangé par composition avec un isomorphisme, théorème du rang (forme géométrique, cas de la dimension finie).

Démonstrations exigibles : Théorèmes $18 - 19$

2.3 Représentation matricielle d'une application linéaire

Matrice de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ dans des bases données, traduction matricielle de $v = f(u)$, application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, traduction matricielle de $f = g$, matrice de $f + \lambda g$, isomorphisme $f \mapsto \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ et dimension de $\mathscr{L}(E, F)$, matrice de $g \circ f$, si $\dim(E) = \dim(F)$ alors f bijective ssi $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ inversible, matrice de f^{-1} ; noyau, image, rang de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, théorème du rang matriciel, majoration du rang d'un produit, le rang est inchangé par produit par une matrice inversible et par transposition, caractérisations d'une matrice inversible ; matrice de passage d'une base à une autre, formule de changement de base pour les coordonnées d'un vecteur, pour la matrice de $f \in \mathscr{L}(E, F)$, cas d'un endomorphisme ; matrices semblables, trace de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, de $A + \lambda B$, de A^T, de AB, deux matrices semblables ont même rang et même trace, trace d'un endomorphisme.

Démonstrations exigibles : Propriété $22 - 27$

2.4 Endomorphismes particuliers

Sous espace F stable par $f \in \mathscr{L}(E)$, endomorphisme induit, matrice de f dans une base adaptée à une décomposition $E = F \oplus G$, cas où G est aussi stable par f ; homothétie, réciproque, matrice ; projecteur, caractérisation, matrice diagonale dans une base adaptée ; symétrie, caractérisation, matrice diagonale dans une base adaptée, relations entre symétries et projecteurs pour une même décomposition $E = F \oplus G$.

Chapitre n°6 : Déterminants [cours] [TD]

1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

1.1 Cas des matrices carrées d'ordre 2

Définition, expression, interprétation géométrique, caractérisation de l'inversibilité et matrice inverse.

1.2 Cas des matrices carrées d'ordre 3

Définition, expression, interprétation géométrique.

2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

2.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition, premières propriétés, effet des opérations élémentaires sur sa valeur, déterminant d'une matrice triangulaire ou triangulaire par blocs.

Démonstration exigible : Propriété 2 (points 1.2.3.)

2.2 Déterminant d'un produit, de l'inverse, d'une transposée

Déterminant de AB, de A^k, caractérisation de l'inversibilité, déterminant de A^{-1}, de A^T, les propriétés sur les colonnes se transposent sur les lignes.

Démonstration exigible : Théorème 5

2.3 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne, point méthode.

3 Déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme

3.1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée, caractérisation des bases.

3.2 Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant de $f \in \mathscr{L}(E)$, de λf, de $g \circ f$, caractérisation des automorphismes, déterminant de f^{-1}.

Démonstration exigible : Théorème 8