Colle n°8 - semaine du 11 au 17 novembre 2024

Format possible

– question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations de ce programme** ;

– application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

– exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°5 : Compléments d'algèbre linéaire [cours] [TD]

1 Espaces vectoriels et familles de vecteurs

1.1 Structure d'espace vectoriel

Espace vectoriel, espaces usuels, produit d'un nombre fini d'e.v., définition et caractérisation des s.e.v., stabilité par combinaison linéaire, l'intersection d'un nombre fini de s.e.v. est un s.e.v., s.e.v. engendré par une famille finie de vecteurs, propriétés.

1.2 Familles de vecteurs et bases

Famille finie génératrice, libre, propriétés, base finie, caractérisation par les coordonnées et matrice colonne des coordonnées, bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}_n[X]$, une famille finie de polynômes non nuls de degrés distincts est libre, toute famille de polynômes $(P_0, \dots, P_n)$ vérifiant $\deg(P_k) = k$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Espace vectoriel de dimension finie, théorèmes de la base extraite et de la base incomplète, existence de bases et dimension, droites et plans vectoriels ; le cardinal d'une famille génératrice est supérieur ou égal à la dimension de l'espace, avec égalité ssi elle est une base, cas des familles libres, la dimension d'un s.e.v. est inférieur ou égale à la dimension de l'espace, avec égalité ssi c'est l'espace tout entier ; dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$; rang d'une famille finie de vecteurs, caractérisation des familles libres, génératrices et des bases par le rang ; dimension du produit d'un nombre fini d'e.v. de dimensions finies ;

Démonstration exigible : Propriété 11 **(pour** $n = 2$ **e.v.)**

1.4 Somme de sous espaces vectoriels

la somme de deux s.e.v. est un s.e.v., somme de deux Vect, définition de deux s.e.v. en somme directe, supplémentaires, caractérisations par l'intersection nulle, formule de Grassman, caractérisation de la supplémentarité par la dimension, existence et dimension de supplémentaires en dimension finie ; somme de plusieurs s.e.v., somme directe, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul, caractérisation de la supplémentarité par la base adaptée, dimension d'une somme directe.

Démonstration exigible : Propriété 15

1.5 Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie

Hyperplan comme s.e.v. admettant une droite supplémentaire, caractérisation par la dimension, par une équation linéaire, dimension de l'intersection de plusieurs hyperplans, caractérisation d'un s.e.v. par l'intersection de plusieurs hyperplans.

Démonstration exigible : Théorème 14 **(**$\Rightarrow$ **seulement)**

2 Applications linéaires et matrices

2.1 Généralités sur les applications linéaires

Application linéaire $f : E \mapsto F$, endomorphisme, forme linéaire, image du vecteur nul et d'une combinaison linéaire, image et noyau de f, ensemble des solutions de $f(x) = b$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont s.e.v. de E et F (resp.), caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité par l'image et le noyau (resp.) ; linéarité de $f + \lambda g$, de $g \circ f$, de f^{-1} (si f bijective), distributivité de la composition à gauche ou a droite, $\mathscr{L}(E, F)$ est un e.v., puissances d'un endomorphisme, isomorphisme, espaces isomorphes, automorphisme, groupe linéaire de E.

2.2 Application linéaire sur un espace de dimension finie

Génération de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ (et de $\mathrm{Im}(f)$) par l'image d'une base de E, caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité par l'image d'une base, E et F isomorphes ssi $\dim(E) = \dim(F)$, si $\dim(E) = \dim(F)$ alors $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective ssi f est injective ssi f est surjective, cas des endomorphismes ; rang de f, majoration du rang de f, du rang d'une composée, le rang est inchangé par composition avec un isomorphisme, théorème du rang (forme géométrique, cas de la dimension finie).

Démonstrations exigibles : Théorèmes $18 - 19$

2.3 Représentation matricielle d'une application linéaire

Matrice de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ dans des bases données, traduction matricielle de $v = f(u)$, application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, traduction matricielle de $f = g$, matrice de $f + \lambda g$, isomorphisme $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ et dimension de $\mathscr{L}(E, F)$, matrice de $g \circ f$, si $\dim(E) = \dim(F)$ alors f bijective ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ inversible, matrice de f^{-1} ; noyau, image, rang de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, théorème du rang matriciel, majoration du rang d'un produit, le rang est inchangé par produit par une matrice inversible et par transposition, caractérisations d'une matrice inversible ; matrice de passage d'une base à une autre, formule de changement de base pour les coordonnées d'un vecteur, pour la matrice de $f \in \mathscr{L}(E, F)$, cas d'un endomorphisme ; matrices semblables, trace de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, de $A+\lambda B$, de A^T, de AB, deux matrices semblables ont même rang et même trace, trace d'un endomorphisme.

Démonstration exigible : Propriétés $22 - 27$

2.4 Endomorphismes particuliers

Sous espace F stable par $f \in \mathscr{L}(E)$, endomorphisme induit, matrice de f dans une base adaptée à une décomposition $E = F \oplus G$, cas où G est aussi stable par f ; homothétie, réciproque, matrice ; projecteur, caractérisation, matrice diagonale dans une base adaptée ; symétrie, caractérisation, matrice diagonale dans une base adaptée, relations entre symétries et projecteurs pour une même décomposition $E = F \oplus G$.