Colle n°7 - semaine du 04 au 10 novembre 2024

Format possible

– question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations de ce programme** ;

– application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

– exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Formulaire [c'est ici]

Connaître les formules de trigonométrie, calcul algébrique, fonctions usuelles, croissances comparées, équivalents, dérivées, primitives, intégrales généralisées usuelles, sommes de Riemann, formules de Taylor et développements limités usuels.

Chapitre n°4 : Intégration sur un intervalle [cours] [TD]

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment (à réviser)

2 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle quelconque

2.1 Intégrale généralisée

Convergence de l'intégrale (généralisée) d'une fonction continue sur $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ et valeur en cas de convergence, cas des fonctions prolongeables par continuité ; nature (CV ou DV) des intégrales

$$\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}.$$

Démonstration exigible : Théorème 8 (1.2.5. **seulement**)

2.2 Propriétés de l'intégrale généralisée

Linéarité en cas de convergence, cas des fonctions complexes ; positivité et croissance de l'intégrale d'une fonction réelle en cas de convergence ; intégration par parties et changement de variable pour les intégrales généralisées.

2.3 Convergence de l'intégrale d'une fonction réelle positive

Théorème de la limite monotone pour les intégrales généralisées de fonctions positives, comparaison d'intégrales de fonctions positives pour les relations $\leq, \mathcal{O}, o$, comparaison avec une intégrale de Riemann (par la limite de $t^\alpha f(t)$), comparaison série-intégrale.

Démonstration exigible : Théorème 15 (1. **seulement**)

2.4 Absolue convergence de l'intégrale d'une fonction réelle ou complexe

Intégrale absolument convergente, fonction intégrable sur un intervalle I, fonctions intégrables de référence, comparaison pour les fonctions intégrables par les relations $\leq, \mathcal{O}, o, \sim$, si f est intégrable sur I alors l'intégrale $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ converge, inégalité triangulaire en cas d'absolue convergence ; si f est intégrable positive sur I et si $\int_I f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors f est nulle sur I, structure d'espace vectoriel de $L^1(I, \mathbb{K})$.

Démonstration exigible : Théorème 20

Chapitre n°5 : Compléments d'algèbre linéaire [cours] [TD]

1 Espaces vectoriels et familles de vecteurs

1.1 Structure d'espace vectoriel

Espace vectoriel, espaces usuels, produit d'un nombre fini d'e.v., définition et caractérisation des s.e.v., stabilité par combinaison linéaire, l'intersection d'un nombre fini de s.e.v. est un s.e.v., s.e.v. engendré par une famille finie de vecteurs, propriétés.

1.2 Familles de vecteurs et bases

Famille finie génératrice, libre, propriétés, base finie, caractérisation par les coordonnées et matrice colonne des coordonnées, bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}_n[X]$, une famille finie de polynômes non nuls de degrés distincts est libre, toute famille de polynômes $(P_0, \ldots, P_n)$ vérifiant $\deg(P_k) = k$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Espace vectoriel de dimension finie, théorèmes de la base extraite et de la base incomplète, existence de bases et dimension, droites et plans vectoriels ; le cardinal d'une famille génératrice est supérieur ou égal à la dimension de l'espace, avec égalité ssi elle est une base, cas des familles libres, la dimension d'un s.e.v. est inférieur ou égale à la dimension de l'espace, avec égalité ssi c'est l'espace tout entier ; dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$; rang d'une famille finie de vecteurs, caractérisation des familles libres, génératrices et des bases par le rang ; dimension du produit d'un nombre fini d'e.v. de dimensions finies ;

Démonstration exigible : Propriété 11 **(pour** $n = 2$ **e.v.)**

1.4 Somme de sous espaces vectoriels

la somme de deux s.e.v. est un s.e.v., somme de deux Vect, définition de deux s.e.v. en somme directe, supplémentaires, caractérisations par l'intersection nulle, formule de Grassman, caractérisation de la supplémentarité par la dimension, existence et dimension de supplémentaires en dimension finie ; somme de plusieurs s.e.v., somme directe, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul, caractérisation de la supplémentarité par la base adaptée, dimension d'une somme directe.

Démonstration exigible : Propriété 15

1.5 Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie

Hyperplan comme s.e.v. admettant une droite supplémentaire, caractérisation par la dimension, par une équation linéaire, dimension de l'intersection de plusieurs hyperplans, caractérisation d'un s.e.v. par l'intersection de plusieurs hyperplans.

Démonstration exigible : Théorème 14 **(**$\Rightarrow$ **seulement)**