Colle n°6 - semaine du 14 au 20 octobre 2024

Format possible

– question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations de ce programme** ;

– application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

– exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Formulaire [c'est ici]

Connaître le formulaire de trigonométrie, calcul algébrique, suites et séries numériques, croissances comparées, équivalents, dérivées, primitives et développements limités usuels.

Chapitre n°3 : Suites et séries numériques [cours] [TD]

2.2 Séries usuelles (à connaître)

2.4 Séries absolument convergentes et produit de Cauchy

Série absolument convergente, l'absolue convergence entraine la convergence (réciproque fausse), inégalité triangulaire en cas d'absolue convergence ; comparaison de séries absolument convergentes par les relations $\leq$, $\mathcal{O}$, o, $\sim$; règle de d'Alembert, produit de Cauchy de deux séries, convergence et somme du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Démonstration exigible : Théorème 17

Chapitre n°4 : Intégration sur un intervalle [cours] [TD]

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1 Définition au sens de Riemann

Interprétation géométrique, extension, valeur moyenne.

1.2 Propriétés de l'intégrale sur un segment

Pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, relation de Chasles, linéarité, positivité, croissance et inégalité triangulaire ; si f est continue positive et d'intégrale nulle sur $[a, b]$ alors f est nulle sur $[a, b]$, définition et convergence des sommes de Riemann d'une fonction continue sur un segment.

1.3 Théorème fondamental

Théorème fondamental du calcul intégral, existence d'une primitive pour une fonction continue, lien entre intégrale sur un segment et primitive, savoir étudier une fonction intégrale à bornes variables (simple) ; égalité de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

1.4 Calcul intégral sur un segment

Intégration par parties et changement de variable sur un segment, intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment $[-a, a]$ ou d'une fonction T-périodique sur $[a, a + T]$; extension au fonctions complexes de l'intégrale sur un segment et de quelques résultats, connaître les méthodes de calcul d'intégrales usuelles (cf. point méthode).

2 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle quelconque

2.1 Intégrale généralisée

Convergence de l'intégrale (généralisée) d'une fonction continue sur $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$ et valeur en cas de convergence, cas des fonctions prolongeables par continuité ; nature (CV ou DV) des intégrales

$$\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}.$$

Démonstration exigible : Théorème 8 **(**1.2.5. **seulement)**

2.2 Propriétés de l'intégrale généralisée

Linéarité en cas de convergence, cas des fonctions complexes ; positivité et croissance de l'intégrale d'une fonction réelle en cas de convergence ; intégration par parties et changement de variable pour les intégrales généralisées.

2.3 Convergence de l'intégrale d'une fonction réelle positive

Théorème de la limite monotone pour les intégrales généralisées de fonctions positives, comparaison d'intégrales de fonctions positives pour les relations $\leq, \mathcal{O}, o$, comparaison avec une intégrale de Riemann (par la limite de $t^\alpha f(t)$), comparaison série-intégrale.

Démonstration exigible : Théorème 15 **(**1. **seulement)**

2.4 Absolue convergence de l'intégrale d'une fonction réelle ou complexe

Intégrale absolument convergente, fonction intégrable sur un intervalle I, fonctions intégrables de référence, comparaison pour les fonctions intégrables par les relations $\leq, \mathcal{O}, o, \sim$, si f est intégrable sur I alors l'intégrale $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ converge, inégalité triangulaire en cas d'absolue convergence ; si f est intégrable positive sur I et si $\int_I f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors f est nulle sur I, structure d'espace vectoriel de $L^1(I,\mathbb{K})$.

Démonstration exigible : Théorème 20