Colle n°5 - semaine du 07 au 13 octobre 2024

Format possible

– question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations de ce programme** ;

– application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

– exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Formulaire [c'est ici]

Connaître le formulaire de trigonométrie, calcul algébrique, suites et séries numériques, croissances comparées, équivalents, dérivées, primitives et développements limités usuels.

Chapitre n°3 : Suites et séries numériques [cours] [TD]

1 Suites numériques

1.1 Suites usuelles

Suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique et récurrente linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.

1.2 Limite d'une suite réelle

Suite de limite finie ou infinie, convergente, divergente, unicité de la limite, limite d'une suite extraite, cas où (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite, une suite convergente est bornée, si la limite est $\ell \neq 0$ alors u_n est du signe de ℓ à partir d'un certain rang ; théorème d'existence d'une limite finie ou infinie par encadrement, majoration ou minoration, passage à la limite dans une inégalité large, relations de comparaison et propriétés, croissances comparées, théorème de la limite monotone, étude d'une suite récurrente d'ordre 1 ou d'une suite implicite (simples), théorème des suites adjacentes, approximation décimale d'un réel.

2 Séries numériques

2.1 Généralités sur les séries

Série, sommes partielles, série convergente ou divergente, somme d'une série convergente, la convergence ne dépend pas des premiers termes, restes d'une série qui converge, condition nécessaire de convergence, linéarité de la somme en cas de convergence des séries.

Démonstration exigible : Théorème 6

2.2 Séries usuelles

Critère de convergence des séries géométriques, somme et restes ; critère de convergence des séries télescopiques (comparaison suite-série), somme ; critère de convergence d'une série par une comparaison série-intégrale, encadrement des sommes partielles en cas de divergence, critère de convergence des séries de Riemann ; définition et convergence des séries alternées, encadrement de la somme ou majoration de la valeur absolue du reste d'ordre N.

Démonstration exigible : Théorème 10 **et Théorème** 11 **(pour la convergence seulement)**

2.3 Séries à termes positifs

Théorème de la limite monotone, comparaison de séries à termes positifs par les relations $\leq$, $\mathcal{O}$, o, $\sim$, comparaison avec une série de Riemann (par la limite de $n^\alpha u_n$).

Démonstration exigible : Théorème 14

2.4 Séries absolument convergentes et produit de Cauchy

Série absolument convergente, l'absolue convergence entraine la convergence (réciproque fausse), inégalité triangulaire en cas d'absolue convergence ; comparaison de séries absolument convergentes par les relations $\leq$, $\mathcal{O}$, o, $\sim$; règle de d'Alembert, produit de Cauchy de deux séries, convergence et somme du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Démonstration exigible : Théorème 17

Chapitre n°4 : Intégration sur un intervalle [cours] [TD]

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1 Définition au sens de Riemann

Interprétation géométrique, extension, valeur moyenne.

1.2 Propriétés de l'intégrale sur un segment

Pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, relation de Chasles, linéarité, positivité, croissance et inégalité triangulaire ; si f est continue positive et d'intégrale nulle sur $[a, b]$ alors f est nulle sur $[a, b]$, définition et convergence des sommes de Riemann d'une fonction continue sur un segment.

1.3 Théorème fondamental

Théorème fondamental du calcul intégral, existence d'une primitive pour une fonction continue, lien entre intégrale sur un segment et primitive, savoir étudier une fonction intégrale à bornes variables (simple) ; égalité de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

1.4 Calcul intégral sur un segment

Intégration par parties et changement de variable sur un segment, intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment $[-a, a]$ ou d'une fonction T-périodique sur $[a, a + T]$; extension au fonctions complexes de l'intégrale sur un segment et de quelques résultats, connaître les méthodes de calcul d'intégrales usuelles (cf. point méthode).