Colle n°22 - semaine du 24 au 30 mars 2025

Format possible

– question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **pas de démonstration** ;

– application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

– exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°15 : Compléments sur les courbes planes [cours] [TD]

1 Courbes implicites du plan

1.1 Courbes définies par une équation cartésienne

Courbe plane définie par une équation cartésienne $f(x, y) = 0$, point régulier, le gradient est normal à la tangente en un point régulier, équation de cette tangente ; lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

1.2 Étude des coniques

Définition des coniques par foyer-directrice-excentricité, classification en fonction de l'excentricité, obtention d'une équation réduite à partir de la définition géométrique dans un repère adapté ; classification, détermination des éléments géométriques (centre et axes de symétrie, sommets, petit axe et grand axe d'une ellipse, asymptotes d'une hyperbole) et d'un paramétrage à partir de l'équation réduite ; une courbe d'équation $ax^2 + 2bxy + cx^2 + dx + ey + f = 0$, $(a, b, c) \neq 0$, est une conique (éventuellement dégénérée), cas particulier des hyperboles d'équations $xy = k$, $k \in \mathbb{R}^*$, savoir déterminer la nature de la conique à l'aide du déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, réduction de A pour obtenir une équation réduite dans un repère orthonormé direct, ses éléments géométriques et la tracer.

2 Propriétés métriques d'une courbe plane

2.1 Longueur et abscisse curviligne

Longueur d'un arc de courbe paramétrée régulier de classe $\mathscr{C}^1$, cas de la courbe représentative d'une fonction ; abscisse curviligne, cas du cercle trigonométrique paramétré par $(\cos(t), \sin(t))$, dérivée et bijectivité de l'abscisse curviligne, paramétrisation par l'abscisse curviligne.

2.2 Repère de Frenet et courbure en un point régulier

Repère de Frenet, courbure, savoir calculer la courbure à l'aide du repère de Frenet et des premières formules de Frenet ; expression angulaire du repère de Frenet (théorème de relèvement), expression angulaire de la courbure, savoir calculer la courbure par cette expression angulaire (expression angulaire des formules de Frenet).

3.2 Rayon de courbure et centre de courbure en un point birégulier

Point birégulier d'une courbe $\mathscr{C}^2$, rayon, centre et cercle de courbure ; définition de la développée d'une courbe régulière de classe $\mathscr{C}^2$ comme ensemble des centres de courbures, caractérisation comme enveloppe des normales.

Chapitre n°16 : Courbes et surfaces de l'espace [cours] [TD]

1 Éléments de géométrie euclidienne dans l'espace

1.1 Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte

Définition géométrique, caractérisation de l'orthogonalité, de la colinéarité, de la coplanarité, des familles directes, expression dans une base orthonormale directe.

1.2 Plans, droites et sphères de l'espace

Caractérisation d'un plan par un point et un vecteur normal, un point et deux vecteurs directeurs, trois points (équations cartésiennes et représentations paramétriques), projeté orthogonal d'un point sur un plan, distance d'un point à un plan ; caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur, comme intersection de deux plans, par deux points (équations cartésiennes et représentations paramétriques), projeté orthogonal d'un point sur une droite, distance d'un point à une droite ; équation cartésienne d'une sphère définie par son centre et son rayon, recherche de l'intersection d'une sphère et d'un plan, équations d'un cercle, recherche de la projection orthogonale d'un cercle sur les plans de coordonnées.

2 Courbes et surfaces

2.1 Courbe définie par une représentation paramétrique

Courbe paramétrée de l'espace, courbe plane, courbe gauche, projections orthogonales sur les plans de coordonnées, point régulier et courbe régulière, tangente en un point régulier.

2.2 Surface définie par une représentation paramétrique

Surface (ou nappe) paramétrée, courbes coordonnées, point régulier, surface régulière, plan tangent à une surface paramétrée en un point régulier, droite normale en un point régulier, recherche d'une équation cartésienne, intersections avec les plans de coordonnées.

2.3 Surface définie par une équation cartésienne

Paramétrage d'une surface d'équation $z = f(x, y)$, une telle surface est régulière, équation d'un plan tangent, position relative ; surface d'équation $F(x, y, z) = 0$, point régulier, en un point régulier M_0 une telle surface admet un plan tangent de vecteur normal $\overrightarrow{\nabla} F(M_0)$, équation d'un plan tangent, intersection avec les plans de coordonnées.