Colle n°21 - semaine du 17 au 23 mars 2025

Format possible

– question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **pas de démonstration** ;

– application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

– exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

1 Fonctions réelle de deux (ou trois) variables

1.1 Domaine de définition et graphe

Boules ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne canonique, point intérieur ou adhérent à une partie de $\mathbb{R}^2$, partie ouverte, fermée et/ou bornée de $\mathbb{R}^2$, définition d'une fonction réelle de deux variables, surface représentative et lignes de niveau, extremum global ou local.

1.2 Limites et continuité

Limite en un point adhérent, continuité en un point, sur une partie, théorèmes généraux (pour la continuité), si une fonction de deux variables est continue alors ses fonctions partielles sont continues (réciproque fausse), partie ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^2$ définie par une fonction de deux variables continue et une inégalité stricte (resp. large) ; théorème des bornes atteintes et application à l'étude de la continuité d'une fonction intégrale sur un segment dépendant d'un paramètre ; .

2 Régularité d'une fonction réelle de deux (ou trois) variables

2.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Dérivées partielles, fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert, théorèmes généraux (pour la classe $\mathscr{C}^1$), formule de Taylor-Young à l'ordre 1, gradient, point critique, extension aux fonctions de trois variables de ce qui précède ; équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ en $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Dérivées partielles secondes, fonction de classe $\mathscr{C}^2$, théorèmes généraux (pour la classe $\mathscr{C}^2$), théorème de Schwarz, extension aux fonctions de trois variables de ce qui précède ; formule de Taylor-Young à l'ordre deux, matrice Hessienne d'une fonction $\mathscr{C}^2$, détermination de la nature d'un point critique par le signe du déterminant et de la trace de la matrice Hessienne en ce point, application à la recherche d'extremums sur un ouvert et sur un fermé borné.

3 Composition avec une fonction vectorielle

Dérivée de $t \mapsto f(x(t), y(t))$ (règle de la chaîne), interprétation et dérivée selon un vecteur ; fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, fonctions coordonnées, limite et continuité, caractérisation par les coordonnées, caractérisation de la classe $\mathscr{C}^1$ (ou $\mathscr{C}^2$) par les coordonnées, règle de la chaine généralisée, application au passage en coordonnées polaires et à la résolution d'équations aux dérivées partielles par des changements de coordonnées (simples).

Chapitre n°15 : Compléments sur les courbes planes [cours] [TD]

1 Courbes implicites du plan

1.1 Courbes définies par une équation cartésienne

Courbe plane définie par une équation cartésienne $f(x, y) = 0$, point régulier, le gradient est normal à la tangente en un point régulier, équation de cette tangente ; lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

1.2 Étude des coniques

Définition des coniques par foyer-directrice-excentricité, classification en fonction de l'excentricité, obtention d'une équation réduite à partir de la définition géométrique dans un repère adapté ; classification, détermination des éléments géométriques (centre et axes de symétrie, sommets, petit axe et grand axe d'une ellipse, asymptotes d'une hyperbole) et d'un paramétrage à partir de l'équation réduite ; une courbe d'équation $ax^2 + 2bxy + cx^2 + dx + ey + f = 0$, $(a, b, c) \neq 0$, est une conique (éventuellement dégénérée), cas particulier des hyperboles d'équations $xy = k$, $k \in \mathbb{R}^*$, savoir déterminer la nature de la conique à l'aide du déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, réduction de A pour obtenir une équation réduite dans un repère orthonormé direct, ses éléments géométriques et la tracer.

2 Propriétés métriques d'une courbe plane

2.1 Longueur et abscisse curviligne

Longueur d'un arc de courbe paramétrée régulier de classe $\mathscr{C}^1$, cas de la courbe représentative d'une fonction ; abscisse curviligne, cas du cercle trigonométrique paramétré par $(\cos(t), \sin(t))$, dérivée et bijectivité de l'abscisse curviligne, paramétrisation par l'abscisse curviligne.

2.2 Repère de Frenet et courbure en un point régulier

Repère de Frenet, courbure, savoir calculer la courbure à l'aide du repère de Frenet et des premières formules de Frenet ; expression angulaire du repère de Frenet (théorème de relèvement), expression angulaire de la courbure, savoir calculer la courbure par cette expression angulaire (expression angulaire des formules de Frenet).

3.2 Rayon de courbure et centre de courbure en un point birégulier

Point birégulier d'une courbe $\mathscr{C}^2$, rayon, centre et cercle de courbure ; définition de la développée d'une courbe régulière de classe $\mathscr{C}^2$ comme ensemble des centres de courbures, caractérisation comme enveloppe des normales.