Colle n°20 - semaine du 10 au 16 mars 2025

Format possible

− question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations au programme** ;

− application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

− exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°13 : Espérance et variance d'une v.a.r.d. [cours] [TD]

1 Espérance mathématique d'une v.a.r.d. (à réviser)

2 Variance et écart-type d'une v.a.r.d. (à réviser)

3 Covariance de deux variables aléatoires discrètes réelles

Si X^2 et Y^2 sont d'espérances finies alors XY aussi, formule de transfert pour $\mathrm{E}(XY)$, inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité ; covariance de deux v.a.r.d., formule $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, symétrie, bilinéarité et positivité de la covariance, variance d'une somme de deux v.a.r.d., cas de deux variables décorrélées, inégalité $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$; si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ et $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$ (réciproque fausse).

4 Sommes et produits de variables aléatoires discrètes (généralisation)

Loi d'un n-uplet de v.a.r.d., espérance et variance d'une somme, cas des variables décorrélées deux à deux ; espérance d'un produit fini et variance d'une somme finie de v.a.r.d. indépendantes ; connaître la loi l'espérance et la variance d'une somme finie de v.a. de Bernoulli i.i.d. ; loi faible des grands nombres, savoir retrouver la majoration par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Démonstration exigible : Théorème 3

5 Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

Série et fonction génératrice G_X d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$, savoir retrouver les fonctions génératrices des lois usuelles, rayon $R_X \geq 1$, $\mathrm{E}(t^X) = G_X(t)$, classe $\mathscr{C}^\infty$ de G_X sur $]-R_X, R_X[$ et caractérisation de la loi de X par G_X ; fonction génératrice d'une somme finie de v.a. indépendantes, espérance et variance en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

Démonstration exigible : Théorème 4

Chapitre n°14 : Fonctions de plusieurs variables [cours] [TD]

1 Fonctions réelle de deux (ou trois) variables

1.1 Domaine de définition et graphe

Boules ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne canonique, point intérieur ou adhérent à une partie de $\mathbb{R}^2$, partie ouverte, fermée et/ou bornée de $\mathbb{R}^2$, définition d'une fonction réelle de deux variables, surface représentative et lignes de niveau, extremum global ou local.

1.2 Limites et continuité

Limite en un point adhérent, continuité en un point, sur une partie, théorèmes généraux (pour la continuité), si une fonction de deux variables est continue alors ses fonctions partielles sont continues (réciproque fausse), partie ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^2$ définie par une fonction de deux variables continue et une inégalité stricte (resp. large) ; théorème des bornes atteintes et application à l'étude de la continuité d'une fonction intégrale sur un segment dépendant d'un paramètre ; .

2 Régularité d'une fonction réelle de deux (ou trois) variables

2.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Dérivées partielles, fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert, théorèmes généraux (pour la classe $\mathscr{C}^1$), formule de Taylor-Young à l'ordre 1, gradient, point critique, extension aux fonctions de trois variables de ce qui précède ; équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ en $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration exigible : Théorème 4 (pour un maximum local)

2.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Dérivées partielles secondes, fonction de classe $\mathscr{C}^2$, théorèmes généraux (pour la classe $\mathscr{C}^2$), théorème de Schwarz, extension aux fonctions de trois variables de ce qui précède ; formule de Taylor-Young à l'ordre deux, matrice Hessienne d'une fonction $\mathscr{C}^2$, détermination de la nature d'un point critique par le signe du déterminant et de la trace de la matrice Hessienne en ce point, application à la recherche d'extremums sur un ouvert et sur un fermé borné.

Démonstration exigible : Théorème 6 (les grandes lignes, sans trop de détails)

3 Composition avec une fonction vectorielle

Dérivée de $t \mapsto f(x(t), y(t))$ (règle de la chaîne), interprétation et dérivée selon un vecteur ; fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, fonctions coordonnées, limite et continuité, caractérisation par les coordonnées, caractérisation de la classe $\mathscr{C}^1$ (ou $\mathscr{C}^2$) par les coordonnées, règle de la chaine généralisée, application au passage en coordonnées polaires et à la résolution d'équations aux dérivées partielles par des changements de coordonnées (simples).