Colle n°19 - semaine du 03 au 09 mars 2025

Format possible

- question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations au programme** ;
- application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;
- exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°13 : Espérance et variance d'une v.a.r.d. [cours] [TD]

1 Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète réelle

Espérance d'une v.a.r.d. discrète infinie, finie, constante, des lois usuelles ; espérance d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ comme somme des $P(X \geq n)$, théorème de transfert, inégalité de Markov ; linéarité, positivité, croissance de l'espérance, variable centrée, si $|X| \leq Y$ et Y est d'espérance finie alors X aussi, si $X \geq 0$ et $E(X) = 0$ alors $P(X = 0) = 1$.

Démonstrations exigibles : Propriété 1 et 3

2 Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète réelle

Si X^2 est d'espérance finie alors X aussi, variance et écart-type, formules $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, variance des lois usuelles ; inégalité de Bienaymé-Tchebychev, interprétation ; formule $V(aX + b) = a^2V(X)$, homogénéité de l'écart-type, variable centrée réduite.

Démonstrations exigibles : Propriété 5 et 6

3 Covariance de deux variables aléatoires discrètes réelles

Si X^2 et Y^2 sont d'espérances finies alors XY aussi, formule de transfert pour $E(XY)$, inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité ; covariance de deux v.a.r.d., formule $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, symétrie, bilinéarité et positivité de la covariance, variance d'une somme de deux v.a.r.d., cas de deux variables décorréelées, inégalité $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$; si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $E(XY) = E(X)E(Y)$, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ (réciproque fausse).

4 Sommes et produits de variables aléatoires discrètes (généralisation)

Loi d'un n -uplet de v.a.r.d., espérance et variance d'une somme, cas des variables décorréelées deux à deux ; espérance d'un produit fini et variance d'une somme finie de v.a.r.d. indépendantes ; connaître la loi l'espérance et la variance d'une somme finie de v.a. de Bernoulli i.i.d. ; loi faible des grands nombres, savoir retrouver la majoration par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Démonstration exigible : Théorème 3

5 Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

Série et fonction génératrice G_X d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$, savoir retrouver les fonctions génératrices des lois usuelles, rayon $R_X \geq 1$, $E(t^X) = G_X(t)$, classe $\mathcal{C}^\infty$ de G_X sur $] -R_X, R_X[$ et caractérisation de la loi de X par G_X ; fonction génératrice d'une somme finie de v.a. indépendantes, espérance et variance en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

Démonstration exigible : Théorème 4