Colle n°18 - semaine du 03 au 09 février 2025

Format possible

– question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations au programme** ;

– application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

– exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°12 : Isométries d'un espace euclidien [cours] [TD]

1 Isométries vectorielles

1.1 Définition et premières propriétés

Isométrie f, caractérisation par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une BON ; composée et réciproque d'isométries, valeurs propres réelles de f, $E_{-1}(f) \perp E_1(f)$, si F est stable par une isométrie f alors $F^{\perp}$ aussi.

Démonstrations exigibles : Théorèmes 1 **et** 2

1.2 Symétries orthogonales et réflexions

Symétrie orthogonale, réflexion, expression vectorielle d'une réflexion, une symétrie est orthogonale ssi c'est une isométrie.

2 Représentation matricielle des isométries vectorielles

2.1 Matrices orthogonales

Matrice orthogonale, groupe orthogonal, caractérisation par les colonnes ou les lignes, produit et inverse de matrices orthogonales.

2.2 Caractérisation matricielle des isométries

Caractérisation matricielle des isométries, déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie, groupe spécial orthogonal, isométrie directe ou indirecte, composée et inverse d'isométries directes ; cas des symétries orthogonales, des réflexions.

2.3 Caractérisation matricielle des bases orthonormées

Caractérisation matricielle d'un changement de base orthonormale, orientation d'un espace euclidien et BON directe ou indirecte, cas de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (base directe ou indirecte).

3 Isométries vectorielles en dimension 2 ou 3

3.1 Isométries vectorielles d'un espace euclidien orienté de dimension 2

Description de $O(2)$, expression matricielle, complexe et géométrique d'une rotation de $\mathbb{R}^2$; rotation d'un plan euclidien, composée et inverse de rotations, isométries d'un plan euclidien et composées ; savoir identifier une rotation et une réflexion de $\mathbb{R}^2$ donnée par sa matrice dans la base canonique.

3.2 Isométries vectorielles d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Description de $SO(3)$, expression matricielle et géométrique d'une rotation de $\mathbb{R}^3$, expression vectorielle ; orientation d'une droite, d'un plan, rotations d'un espaces euclidien de dimension 3 ; savoir identifier une rotation et une réflexion de $\mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice dans la base canonique.

Démonstration exigible : Théorème 10 (à partir de 1 est v.p., sans le redémontrer)

4 Application à la réduction des matrices symétriques réelles

Matrice symétrique réelle, structure et dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, les espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux deux à deux, théorème spectral ; savoir diagonaliser une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 en base orthonormée directe.

Démonstration exigible : Propriété 5

Chapitre n°13 : Espérance et variance d'une v.a.r.d. [cours] [TD]

1 Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète réelle

Espérance d'une v.a.r.d. discrète infinie, finie, constante, des lois usuelles ; espérance d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ comme somme des $\mathrm{P}(X \geq n)$, théorème de transfert, inégalité de Markov ; linéarité, positivité, croissance de l'espérance, variable centrée, si $|X| \leq Y$ et Y est d'espérance finie alors X aussi, si $X \geq 0$ et $\mathrm{E}(X) = 0$ alors $\mathrm{P}(X = 0) = 1$.

Démonstrations exigibles : Propriété 1 et 3

2 Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète réelle

Si X^2 est d'espérance finie alors X aussi, variance et écart-type, formules $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$, variance des lois usuelles ; inégalité de Bienaymé-Tchebychev, interprétation ; formule $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$, homogénéité de l'écart-type, variable centrée réduite.

Démonstrations exigibles : Propriété 5 et 6