

Colle n°17 - semaine du 27 janvier au 02 février 2025

Format possible

- question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations au programme** ;
- application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;
- exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°11 : Espaces préhilbertiens réels [cours] [TD]

1 Produit scalaire et norme associée (à réviser)

2 Orthogonalité dans un espace préhilbertien

2.1 Vecteurs et sous-espaces vectoriels orthogonaux (à réviser)

2.2 Familles orthogonales et orthonormales

Famille de vecteurs orthogonale, orthonormale, relation de Pythagore, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Démonstration exigible : Propriété 7

2.3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

Algorithme de Gram-Schmidt, existence de BON dans un espace euclidien ; expression des coordonnées d'un vecteur, du produit scalaire et de la norme dans une BON, expression matricielle.

Démonstration exigible : Propriété 8

2.4 Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension finie

Si F est de dimension finie alors $E = F \oplus F^\perp$, projecteur orthogonal sur F , expression en BON de F , projection orthogonale sur une droite ; dans E euclidien, dimension de F^\perp , projection orthogonale sur un hyperplan, équation dans une BON et vecteur normal ; théorème de minimisation des distances.

Démonstrations exigibles : Théorèmes 7

Chapitre n°12 : Isométries d'un espace euclidien [cours] [TD]

1 Isométries vectorielles

1.1 Définition et premières propriétés

Isométrie f , caractérisation par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une BON ; composée et réciproque d'isométries, valeurs propres réelles de f , $E_{-1}(f) \perp E_1(f)$, si F est stable par une isométrie f alors F^\perp aussi.

Démonstrations exigibles : Théorèmes 1 et 2

1.2 Symétries orthogonales et réflexions

Symétrie orthogonale, réflexion, expression vectorielle d'une réflexion, une symétrie est orthogonale ssi c'est une isométrie.

2 Représentation matricielle des isométries vectorielles

2.1 Matrices orthogonales

Matrice orthogonale, groupe orthogonal, caractérisation par les colonnes ou les lignes, produit et inverse de matrices orthogonales.

2.2 Caractérisation matricielle des isométries

Caractérisation matricielle des isométries, déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie, groupe spécial orthogonal, isométrie directe ou indirecte, composée et inverse d'isométries directes ; cas des symétries orthogonales, des réflexions.

2.3 Caractérisation matricielle des bases orthonormées

Caractérisation matricielle d'un changement de base orthonormale, orientation d'un espace euclidien et BON directe ou indirecte, cas de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 (base directe ou indirecte).

3 Isométries vectorielles en dimension 2 ou 3

3.1 Isométries vectorielles d'un espace euclidien orienté de dimension 2

Description de $O(2)$, expression matricielle, complexe et géométrique d'une rotation de \mathbb{R}^2 ; rotation d'un plan euclidien, composée et inverse de rotations, isométries d'un plan euclidien et composées ; savoir identifier une rotation et une réflexion de \mathbb{R}^2 donnée par sa matrice dans la base canonique.

3.2 Isométries vectorielles d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Description de $SO(3)$, expression matricielle et géométrique d'une rotation de \mathbb{R}^3 , expression vectorielle ; orientation d'une droite, d'un plan, rotations d'un espace euclidien de dimension 3 ; savoir identifier une rotation et une réflexion de \mathbb{R}^3 donnée par sa matrice dans la base canonique.

Démonstration exigible : Théorème 10 (à partir de 1 est v.p., sans le redémontrer)

4 Application à la réduction des matrices symétriques réelles

Matrice symétrique réelle, structure et dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, les espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux deux à deux, théorème spectral ; savoir diagonaliser une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 en base orthonormée directe.

Démonstration exigible : Propriété 5