Colle n°16 - semaine du 20 au 26 janvier 2025

Format possible

– question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations au programme** ;

– application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

– exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°11 : Espaces préhilbertiens réels [cours] [TD]

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^3$

Rappels sur le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^3$ et la norme associée.

1.2 Produit scalaire sur E

Produit scalaire sur un espace vectoriel, premières propriétés, espaces préhilbertiens et euclidiens, produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, et usuel sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration exigible : Théorème 2

1.3 Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire, vecteurs unitaires, distance entre deux vecteurs, identité remarquable, identité de polarisation associée, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, propriétés de la norme et cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire.

Démonstration exigible : Théorème 3

2 Orthogonalité dans un espace préhilbertien

2.1 Vecteurs et sous-espaces vectoriels orthogonaux

Vecteurs orthogonaux, s.e.v. orthogonaux, orthogonal d'un s.e.v., cas particuliers, $F^\perp$ est un s.e.v., F et $F^\perp$ sont en somme directe, cas d'un s.e.v. engendré par une famille de vecteurs.

Démonstration exigible : Propriété 5

2.2 Familles orthogonales et orthonormales

Famille de vecteurs orthogonale, orthonormale, relation de Pythagore, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Démonstration exigible : Propriété 7

2.3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

Algorithme de Gram-Schmidt, existence de BON dans un espace euclidien ; expression des coordonnées d'un vecteur, du produit scalaire et de la norme dans une BON, expression matricielle.

Démonstration exigible : Propriété 8

2.4 Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension finie

Si F est de dimension finie alors $E = F \oplus F^{\perp}$, projecteur orthogonal sur F, expression en BON de F, projection orthogonale sur une droite ; dans E euclidien, dimension de $F^{\perp}$, projection orthogonale sur un hyperplan, équation dans une BON et vecteur normal ; théorème de minimisation des distances.

Démonstrations exigibles : Théorèmes 6 **et** 7