

Colle n°15 - semaine du 13 au 19 janvier 2025

Format possible

- question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations au programme** ;
- application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;
- exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°10 : Séries entières [cours] [TD]

1 Généralités sur les séries entières

1.1 Définition d'une série entière

Définition d'une série entière, coefficients, variable, domaine de convergence.

1.2 Rayon de convergence

Disque ouvert de $\mathbb{C}$, suite complexe bornée ; lemme d'Abel, définition du rayon de convergence par les suites $(a_n r^n)$ bornées, caractérisation par l'absolue convergence des séries $\sum a_n z^n$; intervalle ouvert de convergence pour le cas réel, disque ouvert de convergence pour le cas complexe ; application de la règle de d'Alembert au calcul du rayon de convergence, connaître le rayon de $\sum n^\alpha z^n$.

Démonstration exigible : Lemme 1

1.3 Comparaison et opérations sur les séries entières

Si $|a_n| \leq |b_n|$ ou $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$, si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$; la somme et le produit de Cauchy de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont des séries entières de rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$ (cas où $R_a \neq R_b$ pour la somme) ; savoir que les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstrations exigibles : Propriétés 2

2 Étude des fonctions développables en série entière

2.1 Propriété de la somme d'une série entière de la variable réelle

Intervalle de définition, continuité sur l'intervalle de définition ; classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence, dérivation terme à terme, lien entre a_n et $f^{(n)}(0)$; primitivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, application au calcul intégral sur un segment de l'intervalle ouvert de convergence.

2.2 Fonctions de la variable réelle développables en série entière

Fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$, une fonction DSE sur $] -r, r[$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$ (reciproque fausse), unicité du DSE (série de Taylor), cas des fonctions paires et impaires ; DSE usuels, recherche de solutions DSE d'une équation différentielle linéaire et de DSE de fonctions données.

2.3 Séries géométrique et exponentielle de la variable complexe

Développement en série entière des fonctions complexes $z \mapsto 1/(1-z)$ et $z \mapsto e^z$, rayon de convergence, propriétés algébriques de la fonction exponentielle, module, arguments, parties réelle et imaginaire de e^z .

Démonstration exigible : Propriété 9 ($f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ vérifie : $f(z)f(z') = f(z+z')$ puis $f(x+iy) = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$)

Chapitre n°11 : Espaces préhilbertiens réels [cours] [TD]

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^3$

Rappels sur le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^3$ et la norme associée.

1.2 Produit scalaire sur E

Produit scalaire sur un espace vectoriel, premières propriétés, espaces préhilbertiens et euclidiens, produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, et usuel sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Démonstration exigible : Théorème 2

1.3 Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire, vecteurs unitaires, distance entre deux vecteurs, identité remarquable, identité de polarisation associée, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, propriétés de la norme et cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire.

Démonstration exigible : Théorème 3

2 Orthogonalité dans un espace préhilbertien

2.1 Vecteurs et sous-espaces vectoriels orthogonaux

Vecteurs orthogonaux, s.e.v. orthogonaux, orthogonal d'un s.e.v., cas particuliers, $F^\perp$ est un s.e.v., F et $F^\perp$ sont en somme directe, cas d'un s.e.v. engendré par une famille de vecteurs.

Démonstration exigible : Propriété 5