Colle n°13 - semaine du 16 au 22 décembre 2024

Format possible

– question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **pas de démonstration** ;

– application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

– exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°8 : Probabilités discrètes [cours] [TD]

3 Généralités sur les variables aléatoires discrètes

3.1 Définition et loi de probabilité

Variable aléatoire discrète, événements $(X = x)$, $(X \in A)$ ..., loi P_X, S.C.E. associé à X, caractérisation de la loi de X par la distribution des probabilités $\mathrm{P}(X = x)$, savoir écrire des égalités comme $\mathrm{P}(X = x_n) = \mathrm{P}(X \leq x_n) - \mathrm{P}(X \leq x_{n-1}) = \mathrm{P}(X \geq x_{n+1}) - \mathrm{P}(X \geq x_n)$ pour la loi d'un max ou d'un min par exemple.

3.2 Lois usuelles discrètes réelles

Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi de poisson, loi géométrique, interprétations.

3.3 Couple de variables aléatoires discrètes

Couple de v.a.r.d., loi conjointe et lois marginales, calcul des lois marginales connaissant la loi du couple par la formule des probabilités totales, loi conditionnelle de X sachant un événement A (en particulier sachant $(Y = y)$).

3.4 Variables aléatoires discrètes indépendantes

Couple de v.a.r.d. indépendantes, caractérisation par la loi du couple (X, Y), si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$, famille de v.a.r.d. (mutuellement) indépendantes, si les X_i sont indépendantes alors les $f_i(X_i)$ aussi, et $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ aussi (lemme des coalitions) ; connaître la loi d'une somme finie de v.a. de Bernoulli i.i.d., savoir retrouver la loi d'une somme de deux v.a. de Poisson indépendantes.

Chapitre n°9 : Intégrale dépendant d'un paramètre [cours] [TD]

1 Définition d'une intégrale à paramètre

Savoir déterminer le domaine de définition d'une fonction intégrale à paramètre sur un intervalle quelconque. Étude de la fonction (variation et limites) dans des cas simples.

2 Continuité sous le signe intégrale

Théorème de continuité sous le signe intégrale, passage par une domination locale (guidée par le professeur), cas d'une intégrale à paramètre sur un segment (domination par une constante possible), utilisation de la continuité pour intervertir limite et intégrale.

3 Dérivation sous le signe intégrale

Théorème de dérivation sous le signe intégrale (classe $\mathscr{C}^1$ seulement), passage par une domination locale (guidée par le professeur), cas d'une intégrale à paramètre sur un segment.

4 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème d'intégration terme à terme pour une fonction continue pouvant s'écrire comme la somme d'une série de fonctions intégrables.

à ce stade, on peut utiliser :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,\ \forall x \in]-1, 1[,$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

ou un autre développement donné par le professeur, par exemple, en dérivant terme à terme la série géométrique.