

Colle n°12 - semaine du 09 au 15 décembre 2024

Format possible

- question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations de ce programme** ;
- application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;
- exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°8 : Probabilités discrètes [cours] [TD]

1 Opérations ensemblistes et dénombrement

1.1 Vocabulaire ensembliste et probabiliste

Ensemble fini, dénombrable, au plus dénombrable, toute partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables ; vocabulaire ensembliste (parties, union, intersection, différence, partie disjointes, complémentaire, partition), définitions et vocabulaire probabiliste associé.

1.2 Dénombrement des listes et parties d'un ensemble fini

Produit cartésien fini, puissance d'un ensemble, listes, le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable ; pour des ensembles finis, cardinal d'un produit cartésien, dénombrement des p -listes d'un ensemble fini, des p -listes sans répétition, des permutations, des parties à p éléments, cardinale d'une union disjointe, d'une union quelconque, du complémentaire, d'une différence de deux parties, de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

2 Espaces probabilisés

2.1 Probabilité sur un univers fini

Probabilité sur un univers fini, probabilité du complémentaire, de l'union et de la différence de deux événements, croissance, sous-additivité finie et probabilité d'une union disjointe finie, caractérisation d'une probabilité par les probabilités des événements élémentaires, probabilité uniforme (équiprobabilité).

2.2 Généralisation

Tribu des événements sur un univers quelconque, propriété de l'union et de l'intersection au plus dénombrable d'événements, probabilité sur un espace probabilisable quelconque, σ -additivité, continuité croissante et décroissante, sous-additivité et calcul de probabilités d'unions et d'intersections au plus dénombrables ; événements presque sûr, négligeable, système quasi-complet d'événements.

Démonstration exigible : Propriété 11 (on demandera de démontrer un des trois points)

3 Probabilités conditionnelles et événements indépendants

3.1 Probabilités conditionnelles

Probabilité d'un événement sachant A , P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, premières propriétés, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales (vraie pour un système quasi-complet d'événements) et formule de Bayes.

Démonstration exigible : Propriété 13

3.2 Événements indépendants

Événements indépendants, caractérisation par les probabilités conditionnelles, si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ aussi, indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.

Démonstration exigible : Propriété 18 (pour A et $\overline{B}$)

3 Généralités sur les variables aléatoires discrètes

3.1 Définition et loi de probabilité

Variable aléatoire discrète, événements $(X = x)$, $(X \in A)$..., loi P_X , S.C.E. associé à X , caractérisation de la loi de X par la distribution des probabilités $P(X = x)$, savoir écrire des égalités comme $P(X = x_n) = P(X \leq x_n) - P(X \leq x_{n-1}) = P(X \geq x_{n+1}) - P(X \geq x_n)$ pour la loi d'un max ou d'un min par exemple.

3.2 Lois usuelles discrètes réelles

Loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi de poisson, loi géométrique, interprétations.

3.3 Couple de variables aléatoires discrètes

Couple de v.a.r.d., loi conjointe et lois marginales, calcul des lois marginales connaissant la loi du couple par la formule des probabilités totales, loi conditionnelle de X sachant un événement A (en particulier sachant $(Y = y)$).

3.4 Variables aléatoires discrètes indépendantes

Couple de v.a.r.d. indépendantes, caractérisation par la loi du couple (X, Y) , si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$, famille de v.a.r.d. (mutuellement) indépendantes, si les X_i sont indépendantes alors les $f_i(X_i)$ aussi, et $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ aussi (lemme des coalitions); connaître la loi d'une somme finie de v.a. de Bernoulli i.i.d., savoir retrouver la loi d'une somme de deux v.a. de Poisson indépendantes.