Colle n°10 - semaine du 27 novembre au 01 décembre 2024

Format possible

– question de cours : formules, définitions, propriétés, théorèmes, **démonstrations de ce programme** ;

– application directe du cours : exercice du même type que ceux du cours (faisable assez rapidement) ;

– exercice libre de type "oral de concours" (faisable en 20 à 30 mn sans préparation).

Chapitre n°6 : Déterminants [cours] [TD]

1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

1.1 Cas des matrices carrées d'ordre 2

Définition, expression, interprétation géométrique, caractérisation de l'inversibilité et matrice inverse.

1.2 Cas des matrices carrées d'ordre 3

Définition, expression, interprétation géométrique.

2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

2.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition, premières propriétés, effet des opérations élémentaires sur sa valeur, déterminant d'une matrice triangulaire ou triangulaire par blocs.

Démonstration exigible : Propriété 2 (points 1.2.3.)

2.2 Déterminant d'un produit, de l'inverse, d'une transposée

Déterminant de AB, de A^k, caractérisation de l'inversibilité, déterminant de A^{-1}, de A^T, les propriétés sur les colonnes se transposent sur les lignes.

Démonstration exigible : Théorème 5

2.3 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne, point méthode.

3 Déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme

3.1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée, caractérisation des bases.

3.2 Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant de $f \in \mathscr{L}(E)$, de λf, de $g \circ f$, caractérisation des automorphismes, déterminant de f^{-1}.

Chapitre n°7 : Réduction d'endomorphismes [cours] [TD]

1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres et espaces propres

Vect(u) est stable par $f \in \mathscr{L}(E)$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ t.q. $f(u) = \lambda u$, valeur propre, vecteur propre, sous espace propre, la somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstrations exigibles : Théorème 2 **et Corollaire** 1

1.2 Recherche des éléments propres en dimension finie

polynôme caractéristique, coefficient dominant et degré, expression en dimension 2, spectre, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, multiplicité d'une valeur propre, comparaison avec la dimension de l'espace propre associé, cas des valeurs propres simples ; éléments propres et polynôme caractéristique d'une matrice, cas des matrices triangulaires, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Démonstrations exigibles : Propriétés 1 **et** 2

2 Réduction d'un endomorphisme

2.1 Diagonalisation d'un endomorphisme

Diagonalisabilité d'un endomorphisme, caractérisation par l'existence d'une base de vecteurs propres, cas des homothéties, projecteurs et symétries ; 3 CNS pour être diagonalisable, une CN (polynôme scindé), une CS (polynôme scindé à racines simples) ; diagonalisabilité d'une matrice, application au calcul de puissances.

2.2 Trigonalisation d'un endomorphisme

Trigonalisabilité d'un endomorphisme, caractérisation par le polynôme caractéristique scindé, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-e.v. est trigonalisable, expression du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres (comptées avec multiplicité) ; trigonalisabilité d'une matrice.

Démonstration exigible : Propriété 3