Préparation à l'oral : partie IV

Probabilités

Table des matières

Les sujets d'interrogations orales qui suivent portent sur le programme d'analyse des deux années de préparation PTSI/PT. Avant de s'entraîner, il est conseillé de réviser les cours des chapitres $8-13$ étudiés cette année. Quelques conseils pour les oraux :

1. Présenter brièvement le type d'exercice sur lequel on travaille pour identifier et mobiliser les connaissances en jeu, entamer le dialogue avec le jury (très apprécié).
2. Inutile d'écrire de longues phrases et encore moins de recopier l'énoncé ; les justifications et commentaires doivent être donnés au moment où l'on est interrogé.
3. Lorsqu'une indication est donnée pour aider le candidat, l'écouter et réagir à celle-ci ; la passivité ou l'obstination dans une voie infructueuse sont fortement déconseillées.

1 Préparation à l'oral (II) de Mathématiques aux Arts et Métiers

Exercice 1 (2024, 2015) [corrigé]

Une puce se déplace sur une droite ; au départ, elle est à la position $n \in [\![0, N]\!]$. À chaque saut son abscisse augmente de 1 avec la probabilité $p \in]0,1[$ ou diminue de 1 avec la probabilité $q = 1-p$. Elle s'arrête une fois arrivée en 0 ou en N. On considère les trois événements :

A_n : « la puce s'arrête en 0 », B_n : « la puce s'arrête en N », et C_n : « la puce ne s'arrête jamais ».

On note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Donner une relation entre a_n, b_n et c_n. Calculer a_0, a_N, b_0 et b_N.
2. À l'aide de l'événement D : « le premier saut est vers la droite », montrer que
$$\forall n \in [\![1, N-1]\!], a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}.$$
3. En déduire a_n en fonction de n, p, q et N (on traitera séparément le cas où $p = 1/2$).
4. Faire de même pour b_n. Calculer $a_n + b_n$ et conclure.

Exercice 2 (2015)

10% des pièces d'une production sont mauvaises. On fait passer aux pièces un test qui permet d'accepter 90% des bonnes pièces et de retirer 90% des mauvaises.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée ?
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit bonne bien qu'elle ne soit pas acceptée ?
3. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit mauvaise bien qu'elle soit acceptée ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur ?

Exercice 3 (2021, 2016) [corrigé p.7-8]

1. Montrer que : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.
2. On dispose de deux urnes A et B contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans A et on note a son numéro, on tire une boule dans B et on note b son numéro. Soit E_n l'événement « a divise b ».
   (a) Calculer $P(E_3)$ et $P(E_4)$.
   (b) Calculer $P(E_n)$. En donner un équivalent et la limite lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4 (2022, 2016) [corrigé p.12]

On considère une carte à gratter constituée de neuf cases, six coeurs et trois piques. On considère les symboles répartis au hasard. Le joueur gagne si la carte est composée de trois piques alignés (verticalement, horizontalement ou en diagonale).

1. Trouver la probabilité que le joueur gagne.
2. La société de jeu truque les cartes avec une probabilité $t \in]0, 1[$, en plaçant un pique en haut à gauche puis en répartissant les coeurs et autres piques aléatoirement dans les cases restantes. Quelle est la probabilité que le joueur gagne (en fonction de t) ?
3. Le joueur gagne. Trouver la probabilité pour que la carte soit truquée.
4. La grille coute 1 euro et rapporte 10 euros dans le cas où c'est une grille gagnante.
   Calculer les valeurs de t pour lesquelles l'entreprise peut espérer faire des bénéfices.

Exercice 5 (2022) [corrigé]

Un homme se trouve dans un train de 4 wagons et se balade de wagon en wagon. Lorsqu'il se trouve dans un wagon, il ne peut qu'aller dans celui d'avant ou celui d'après. On note le temps $t = n$, l'instant initial étant $t = 0$, et $p_{k,n}$ la probabilité qu'il soit dans le wagon $k \in [\![1, 4]\!]$ à l'instant n.

1. Trouver une matrice A telle que $\Pi_{n+1} = A\Pi_n$, avec $\Pi_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \end{pmatrix}$.
2. Exprimer Π_{2n}, Π_{2n+1} en fonction de n.
3. Que peut-on dire lorsque $n \longrightarrow +\infty$?

Exercice 6 (2024, 2017) [corrigé]

On résume une partie de tennis de la manière suivante : chaque joueur sert à tour de rôle pour un jeu complet. Le premier joueur qui gagne deux jeux de plus que son adversaire emporte la partie. Chaque joueur gagne le jeu pendant lequel il sert avec un probabilité p. On considère les événements
V_k : « le joueur qui a servi au premier jeu remporte le $k$ème jeu »,
A_{2n} : « le joueur qui a servi au premier jeu remporte la partie au $2n$-ième jeu »et
D_{2n} : « les deux joueurs sont à égalité à l'issue du $2n$-ième jeu ».

1. Exprimer la probabilité $P(A_{2n})$ en fonction de $P(D_{2n-2})$.
2. Exprimer la probabilité $P(D_{2n})$ en fonction de $P(D_{2n-2})$.
   En déduire les valeurs de $P(D_{2n})$ et de $P(A_{2n})$.
3. Calculer la probabilité pour que le joueur ayant servi au premier jeu gagne la partie.
   Y a-t-il un intérêt à jouer en premier ?
4. Soit la variable aléatoire X définie par le nombre de jeux joués au cours de la partie.
   Donner sa loi de probabilité, sa série génératrice et son espérance.

Exercice 7 (2024) [corrigé p.37]

On considère un dés à 6 faces avec 2 faces de 0, 2 faces de 1 et 2 faces de 2.
On réalise trois lancers indépendants et on note A, B et C les résultats.
On note Δ la partie du plan d'équation $Ax + By + C = 0$.

1. Calculer la probabilité que Δ soit une droite.
   On réalise une deuxième fois les trois tirages, les résultats sont notés A', B' et C'.
   On note Δ' la partie d'équation $A'x + B'y + C' = 0$
2. Calculer la probabilité que Δ et Δ' soient toutes les deux des droites.
3. calculer la probabilité que Δ et Δ' soient deux droites parallèles.
4. calculer la probabilité que Δ et Δ' soient deux droites perpendiculaires.

Exercice 8 (2023, 2018) [corrigé]

Soit $(X_{i,j})_{i,j}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = (X_{i,j})$. On dit que $X_{i,j}$ est un point selle de M lorsque :

$$X_{i,j} = \max_k (X_{k,j}) = \min_k (X_{i,k}).$$

1. Quelle est la probabilité que $X_{i,j}$ soit un point selle de M ?
2. Calculer p_n, probabilité qu'au moins une colonne soit nulle. En donner un équivalent.
3. Calculer la probabilité que M admette un point selle.

Exercice 9 (2023) [corrigé p.2]

Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n.

1. On pioche un jeton. Soit X la variable aléatoire donnée par le numéro du jeton.
   Déterminer la loi de X et l'espérance de X.
2. On effectue deux tirages sans remise.
   On note Y_1 le tirage du premier jeton et Y_2 le tirage du deuxième.
   (a) Déterminer la loi de (Y_1, Y_2). En déduire celle de Y_1 et de Y_2.
   (b) Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer la loi de $Z = \max(Y_1, Y_2)$.

Exercice 10 (2022, 2018) [corrigé p.13-14]

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de six boules numérotées de 1 à 6. U_1 contient deux boules et U_2 en contient quatre. On lance un dé et on change d'urne la boule portant le numéro correspondant. Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de boules dans U_1 au bout de n lancers.

1. Donner la loi de X_1.
2. Déterminer $P(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $P(X_n = 1)$.
3. Déterminer $P(X_{n+1} = 6)$ en fonction de $P(X_n = 5)$.
4. Soit $k \in [\![1, 5]\!]$, déterminer $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de la loi de X_n.
5. Montrer que $E(X_{n+1}) = 1 + \dfrac{2}{3}E(X_n)$.
   En déduire $E(X_n)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 11 (2015) [corrigé p.21-22]

On considère une urne qui contient initialement deux boules, une noire et une blanche, ainsi que deux joueurs A et B. Le jeu se déroule de la façon suivante : les deux joueurs A et B tirent une boule dans l'urne à tour de rôle. Si un joueur tire une boule blanche, on la remet dans l'urne et on y ajoute une boule blanche supplémentaire. Si un joueur tire la boule noire, il est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête. Le perdant donne k euros au vainqueur, k étant le nombre total de tirages effectués. On note X le nombre total de tirages effectués, et Y le gain (positif ou négatif) du joueur A.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
2. Justifier que X n'admet pas d'espérance.
3. Justifier que $Y(\Omega) = \{2n + 1, n \in \mathbb{N}\} \cup \{-2n, n \in \mathbb{N}^*\} = \{(-1)^{n+1}n, n \in \mathbb{N}^*\}$.
4. Calculer $P(Y = (-1)^{n+1}n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. La variable aléatoire Y possède-t-elle une espérance ?

Exercice 12 (2017) [corrigé p.9-10]

Un nombre $n \geq 2$ de composants électroniques identiques sont montés en série. Le premier composant reçoit un bit $b \in \{0, 1\}$ et il transmet ce bit au composant suivant avec la probabilité $p \in]0, 1[$, ou bien le bit complémentaire $1 - b$ avec la probabilité $q = 1 - p$, et ainsi de suite jusqu'au dernier composant. On note u_n la probabilité que le premier et le dernier composant aient reçu le même bit.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre total de changements de bits ayant eu lieu.
   (a) Déterminer la loi de X_n. Préciser son espérance, sa variance et sa série génératrice.
   (b) À l'aide de X_n, retrouver la valeur de u_n.

Exercice 13 (2023) [corrigé p.3]

Un ascenseur dessert 3 étages, il y a 5 passagers et chacun descend à un étage. Pour chaque passager, il y a équiprobabilité quand à l'étage où il descend.

1. On note X_i le nombre de personnes qui descendent à l'étage i.
   (a) Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
   (b) Que dire de X_2 et X_3 ?
2. On définit la variable aléatoire Z qui compte le nombre d'arrêts de l'ascenseur et, Y_i la variable aléatoire telle que $Y_i = 1$ si l'ascenseur s'arrête à l'étage i et $Y_i = 0$ sinon.
   (a) Exprimer Z en fonction des Y_i.
   (b) Calculer $P(Y_i = 0)$, puis $P(Y_i = 1)$ et enfin l'espérance de Z.

Exercice 14 (2022) [corrigé p.3-4]

On étudie la floraison d'un oignon au fil des années.
Si un oignon fleurit lors d'une année, il fleurira toutes les années suivantes.
Si l'oignon ne fleurit pas, il fleurira l'année suivante avec une probabilité p.

1. Exprimer P_a la probabilité qu'un oignon fleurisse l'année a.
2. Soit A la variable aléatoire indiquant l'année de la première floraison.
   Calculer $P(A > a)$ et l'espérance $E(A)$.
   On travaille maintenant sur un parterre de n oignons.
3. Exprimer la loi de probabilité du nombre d'oignons fleuris au cours d'une année.
4. Soit T la variable aléatoire indiquant l'année où tous les oignons ont fleuri.
   T admet-elle une espérance ?

Exercice 15 (2024, 2022) [corrigé p.31]

On lance une pièce (la probabilité du pile est notée $p \in]0,1[$) jusqu'à obtenir pile. On note N le nombre de faces obtenus avant le premier pile. Ensuite si $N = n$, on lance n fois la pièce et on note M le nombre de faces obtenus lors de ces n lancers.

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
2. Donner la loi de N et l'espérance de N.
3. Déterminer la loi de M et calculer son espérance.

Exercice 16 (2017) [corrigé]

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

1. Donner la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
2. Calculer $P(X_i = 1 | S_n = k)$ puis $P(X_i = 1, X_j = 1 | S_n = k)$. Que remarque-t-on ?
3. On pose T_n la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du n-ième succès.
   (a) Donner la loi de T_1.
   (b) Donner la loi de T_n. En quoi est-ce différent d'une loi binomiale ?
4. On pose $U_1 = T_1$ et $U_2 = T_2 - T_1$. Montrer que U_1 et U_2 sont indépendantes de même loi.

Exercice 17 (2018) [corrigé en classe]

On pose : $\forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = j, Y = k) = a\dfrac{j+k}{3^{j+k}}$ et $S_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j+k}{3^{j+k}}$.

1. Montrer l'existence de S_k et déterminer sa valeur.
2. Montrer que $\sum S_k$ converge et déterminer sa valeur.
3. Trouver la valeur de a.
4. Donner les lois marginales de X et de Y. Sont-elles indépendantes ?
5. Donner la valeur de $P(X = Y)$.

Exercice 18 (2022, 2021) [corrigé]

Soit X et Y indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.
Soit $T = \min(X, Y)$, $Q = 1/T$ et $Z = |X - Y|$.

1. Donner la loi de T.
2. Montrer l'existence de l'espérance de Q et la calculer.
3. Donner la loi de Z et son espérance.

Exercice 19 (2022, 2021) [corrigé p.24-25-26]

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

1. Calculer $P(X \text{ est pair})$
2. Calculer $P(X < Y))$.
3. Calculer $E(1/Y)$.
4. On pose $Q = X/Y$. Donner $E(Q)$, calculer la loi de Q.

Exercice 20 (2023) [corrigé p.4]

On lance indéfiniment une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$.
Soit X_m le temps d'attente du m-ième pile.

1. Donner la loi de probabilité de X_1.
2. On pose $Y_m = X_{m+1} - X_m$.
   (a) Montrer que Y_m admet une espérance finie et la donner.
   (b) Déterminer l'espérance de X_m.
3. Donner la loi de X_m.

Exercice 21 (2021) [corrigé en classe]

Soit $M(a, b) = \begin{pmatrix} 3a - 2b & -6a + 6b + 3 \\ a - b & -2a + 3b + 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M(a, b)$ est semblable à $\begin{pmatrix} a + 1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
2. Étudier la diagonalisabilité de $M(a, b)$.
3. On suppose que a et b sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p. Calculer la probabilité que $M(a, b)$ soit diagonalisable.

Exercice 22 (2017) [corrigé p.14-15]

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, et l'événement
E_λ : « X est divisible par 3 ».

1. Écrire $P(E_\lambda)$ comme somme d'une série.
2. Montrer que $g : \lambda \longmapsto P(E_\lambda)e^\lambda$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner $g(0)$ et $g'(0)$.
3. Montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
4. Déterminer $g(\lambda)$ pour tout $\lambda > 0$.
5. En déduire la limite de $P(E_\lambda)$ lorsque λ tend vers en $+\infty$.

Exercice 23 (2023, 2016) [corrigé p.17-18]

Un pêcheur possède un dé dont il s'aide pour pêcher. Son dé a une probabilité p de tomber sur l'as. Le pêcheur lance le dé autant de fois qu'il faut pour tomber sur l'as, tout en comptant le nombre de lancers nécessaires. On note X la variable aléatoire associée.

1. Trouver la loi de X, son espérance, sa variance. Calculer $P(X > 1)$.
2. Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, le pêcheur pêche k quarts d'heure. Il compte le nombre de poissons qu'il pêche pendant ces k quarts d'heure, variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre k. Donner la loi du couple (X, Y).
3. Donner la loi de Y comme somme d'une série que l'on ne cherchera pas à calculer.
4. Calculer $E(Y)$ en admettant le résultat suivant :

   Soit u une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{R}^+$.

   Si pour tout entier n, $\sum_k u(k,n)$ converge et si pour tout entier k, $\sum_n u(k,n)$ converge,

   alors $\sum_n \sum_{k=0}^{+\infty} u(k,n)$ et $\sum_k \sum_{n=0}^{+\infty} u(k,n)$ sont convergentes et leurs sommes sont égales.

Exercice 24 (2023) [corrigé en classe]

Le nombre de particules arrivant sur un détecteur est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Une particule arrivant sur le détecteur a une probabilité p d'être détectée. On note Z le nombre de particules détectées.

1. Calculer $P(Z = k|X = n)$ pour $k > n$ et pour $0 \leq k \leq n$.
2. Déterminer la loi de Z, son espérance, sa variance. X et Z sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $X - Z$, son espérance, sa variance. Z et $X - Z$ sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = n|Z = k)$.

Exercice 25 (2024, 2023) [corrigé p.5-6]

Soit X_0, X_1, X_2 trois variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On considère les points $M_i = (i, X_i)$ pour $0 \leq i \leq 2$ et on note Y l'ordonnée du centre de gravité du triangle $M_0M_1M_2$.

1. Déterminer la probabilité que deux points aient la même ordonnée.
2. Déterminer la probabilité que le triangle $M_0M_1M_2$ soit rectangle en M_1.
3. Déterminer la fonction génératrice de X_0.
4. Déterminer la loi de Y. On pourra passer par celle de $Z = 3Y$.

Exercice 26 (2016) [corrigé p.28-29-30]

Soit X une variable qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. X représente le nombre de poissons pêchés par deux pêcheurs. Si X est pair, ils se partagent les poissons et si X est impair, ils font une bouillabaisse. Ils ont une chance sur quatre de ne pas pêcher de poissons.

1. Quelle est la valeur de λ ?
2. Quel est l'événement le plus probable entre "ils font une bouillabaisse" et "ils ne font pas de bouillabaisse" ?
3. Quelle est la probabilité que chacun ait un nombre pair de poissons ?
4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de poissons que chaque pêcheur a obtenu. Donner sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.

Exercice 27 (2022, 2021) [correction]

1. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{n^2+n+1}{n!}t^n$.
2. Calculer, à l'aide de fonctions usuelles, la somme $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2+n+1}{n!}t^n$.
3. On considère une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de série génératrice $G_X(t) = \lambda S(t)$.
   (a) Trouver λ.
   (b) Calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 28 (2016) [corrigé p.26-27-28]

On lance un dé cubique dont les six faces sont numérotées de 0 à 5. On note X la v.a. du numéro sorti et G_X la fonction génératrice correspondante.

1. On lance quatre fois le dé et l'on note S la somme des numéros obtenus.
   Exprimer G_S en fonction de G_X.
2. En supposant le dé équilibré, calculer l'espérance et la variance de X et de S.
3. On ne suppose plus le dé équilibré. Est-il possible que S suive une loi uniforme ?

Exercice 29 (2024) [corrigé p.38]

Soit X une v.a.d. finie qui prend comme valeurs $x_1 < \cdots < x_r$ avec les probabilités :

$$\mathrm{P}(X = x_i) = p_i \in]0, 1[, \ \forall i \in [\![1, r]\!].$$

Soit $L_X : t \longmapsto \ln \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})$.

1. Montrer que L_X est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que L'_X admet des limites en $\pm\infty$ et les déterminer.
3. Prouver l'existence de coefficients $c_0(X), c_1(X), c_2(X), c_3(X)$ tels que

$$L_X(t) = \sum_{k=0}^{3} \frac{c_k(X)}{k!} t^k + o(t^3).$$

4. Soit Y une v.a.d. finie indépendante de X. Montrer que $c_k(X + Y) = c_k(X) + c_k(Y)$.
5. Calculer $c_k(X)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

Exercice 30 (2024) [corrigé p.39]

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathscr{U}(n)$. On note pour $i \in [\![1, n]\!]$, M_i le point de coordonnées (u_i, v_i) dans un repère orthonormé, où $u_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} P(X = k)$, $v_i = \dfrac{1}{E(X)} \displaystyle\sum_{k=1}^{i} kP(X = k)$.
On appelle indice de concentration le réel noté $I(X)$ égal au double de l'aire de la portion du plan compris entre le segment $[OM_n]$ et la ligne polygonale formée en joignant les points $O, M_1, \ldots, M_n$.

1. Calculer les coordonnées de M_n, puis exprimer u_i et v_i en fonction de i et de n.
2. Montrer que $I(X) = \dfrac{n-1}{3n}$.
3. Soit X_1 et X_2 indépendantes de même loi que X. Déterminer la loi de $Y = |X_1 - X_2|$.
4. Montrer que $I(X) = \dfrac{E(Y)}{2E(X)}$.

Exercice 31 (2024) [corrigé]

X, Y sont des v.a. réelles discrètes dont le carré est d'espérance finie.

On pose $A = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X^2) & \mathrm{E}(X) \\ \mathrm{E}(X) & 1 \end{pmatrix}$ et $f(a,b) = \mathrm{E}\left[(Y - aX - b)^2\right]$.

1. À quelle condition A est-elle inversible ? Pour la suite, on suppose que c'est le cas.
2. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Déterminer le signe de ses valeurs propres.
3. Montrer que $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et que ses points critiques vérifient $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B$, avec B à déterminer.
4. En déduire l'ensemble des points critiques de f, puis étudier leur nature.

2 Préparation à l'oral de Mathématiques aux Mines-Télécom

Exercice 1 (2024) [1. corrigé en classe] et [2. corrigé]

1. X, Y sont des variables aléatoires i.i.d. telles que $Z = X + Y + 1 \sim \mathscr{G}(p)$.
   Déterminer $\mathrm{E}(X)$, $G_X(t)$ et la loi de X.
2. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, soit u non nul et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
   $$f_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, u\rangle u, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$
   (a) Montrer que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Montrer que $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\exists m \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \circ f_\beta = f_m$. Exprimer m en fonction de α et β.
   (c) Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f_α est bijective ?

Exercice 2 (2022) [1. corrigé en classe]

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre p. On pose $Z = \max(X, Y)$.
   (a) Déterminer $\mathrm{P}(Z \leq n)$.
   (b) En déduire la loi de Z.
   (c) Montrer que Z est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(Z)$.
2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et f une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = X^n P(1/X)$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Calculer $f \circ f$ et déterminer les valeurs propres de f.

Exercice 3 (2023)

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique.
   (a) Rappeler la définition de la loi de X.
   (b) On note Q et R le reste et le quotient de la division euclidienne de X par 3.
   Déterminer la loi de Q et R.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec a, b, c des réels, on pose $s_1 = a + b + c$ et $s_2 = ab + bc + ac$.
   Montrer que M est orthogonale si et seulement si $s_1 \in \{-1, 1\}$ et $s_2 = 0$.

Exercice 4 (2024) [2. corrigé en classe]

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Trouver P inversible et D diagonale telles que $D = P^T AP$.
   (b) Trouver R à valeurs propres réelles telle que $R^2 = A$.
2. X, Y sont des v.a.d. telles que $\mathrm{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{\mathrm{e}j!(i-j)!2^i}$ si $0 \leq j \leq i$ et 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de X et son espérance.
   (b) Déterminer la loi de Y et son espérance
   (c) X et Y sont-elles indépendantes ?.

Exercice 5 (2024) [2. corrigé]

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et l'application u de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$u(M) = \mathrm{tr}(M)A - \mathrm{tr}(A)M.$$
Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, déterminer ses éléments propres et dire si u est diagonalisable.
2. On lance une pièce non équilibrée qui donne pile avec la probabilité $2/3$ et face avec la probabilité $1/3$. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers jusqu'à avoir 2 piles consécutifs. On note $\mathrm{P}(X = n) = p_n$ pour $n \geq 1$.
   (a) Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$ et $(X = 4)$, puis calculer p_2, p_3 et p_4.
   (b) Montrer que $\forall n \geq 3$, $p_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}p_{n-2}$.
   (c) En déduire la loi de X et son espérance.

Exercice 6 (2024)

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/3$, $u_1 = 2/9$ et, pour tout $n \geq 2$,
$$u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{2}{9}u_{n-2}.$$
   (a) Exprimer u_n en fonction de n.
   (b) Justifier que l'on peut définir une variable aléatoire Y (sur un certain espace probabilisé) à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $P(Y = n) = u_n$ pour tout n.
   (c) On pose $X = Y + 1$. Identifier la loi de X et calculer l'espérance et la variance de Y.
2. Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
Identifier l'application canoniquement associée à A et ses éléments caractéristiques.

Exercice 7 (2018) [corrigé p.30]

1. Une urne contient des boules jaunes (J), rouges (R) et noires (N). On note $p_1 = P(R)$, $p_2 = P(N)$, $p_3 = P(J)$. On effectue une succession de tirages avec remise. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires afin d'avoir une boule de couleur différente.
   (a) Décrire les valeurs prises par X. Donner la loi de X.
   (b) Montrer que X est d'espérance finie. Calculer $E(X)$.
2. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

Exercice 8 (2016) [corrigé]

On lance successivement une pièce qui donne pile avec la probabilité p et face avec la probabilité q. On note B_n l'événement « on obtient deux piles d'affilée pour la première fois au rang n », P_i l'événement « on obtient pile au rang i » et F_i l'événement « on obtient face au rang i ».

1. Montrer que : $P(B_n) = qP(B_n|F_1) + pqP(B_n|P_1 \cap F_2) + p^2P(B_n|P_1 \cap P_2)$.
2. On pose $u_n = P(B_n)$. Donner une relation de récurrence vérifiée par (u_n).
3. Montrer que les racines de $Q = X^2 - qX - pq$ sont dans $]-1, 1[$ en calculant $Q(\pm 1)$ et $Q(0)$.
4. En déduire que $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = 1$. Interprétation.

Exercice 9 (2023, 2016)

1. On considère une pièce truquée avec la probabilité $p \in]0,1[$ d'obtenir Pile. On obtient une liste $PPPFFFFFPFFP$.... par exemple. On note X la variable aléatoire donnant la longueur de la première sous liste (ici 3), et Y celle de la deuxième sous liste (ici 5).

   (a) Déterminer la loi du couple (X, Y).

   (b) Déterminer la loi de X et celle de Y.

2. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 10 (2017) [corrigé p.32-33]

Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. Avec la convention $0 \ln(0) = 0$,

on définit l'incertitude de X par $H(X) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P(X = n) \ln(P(X = n))$ et

l'incertitude conjointe de X, Y par $H(X, Y) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} P(X = i, Y = j) \ln(P(X = i, Y = j))$.

1. Montrer que $H(X) \in \mathbb{R}_+$. A quelle condition a-t-on $H(X) = 0$?
2. En admettant que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$, montrer que
$$\sum_{n=1}^{N} P(X = n) \ln\left(\frac{P(Y = n)}{P(X = n)}\right) \leq 0.$$
3. Dans cette question, Y suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. Montrer que $H(X) \leq \ln(N)$.
4. Dans cette question, X et Y sont indépendantes. Montrer que $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$.

3 Préparation à l'oral (I) de Mathématiques à l'ENS Paris-Saclay

Exercice 1 (2017) [corrigé]

Sur une table, on dispose deux boules noires (étape 0).
À l'étape suivante, on remplace une boule au hasard par une boule blanche avec une probabilité p, ou une boule noire avec la probabilité $q = 1 - p$. Soit les événements A_k : « il y a deux boules noires à l'étape k », B_k : « il y a une boule noire et une boule blanche à l'étape k » et C_k : « il y a deux boules blanches à l'étape k ».

On pose $a_k = P(A_k)$, $b_k = P(B_k)$, $c_k = P(C_k)$ et $U_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$.

1. Trouver $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $U_{k+1} = MU_k$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -q & q^2 \\ -2 & q-p & 2pq \\ 1 & p & p^2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $MP = PD$, puis que $U_k = PD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ -2p \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Donner l'expression de a_k, b_k, c_k en fonction de k, p et q.
4. Déterminer les limites des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$.

Cours : Donner la définition d'une série géométrique, calculer sa série dérivée, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{5^n}$.

Exercice 2 (2017)

Une urne contient $4n$ jetons numérotés de 1 à $4n$. Les jetons de 1 à n sont rouges, ceux de $n+1$ à $2n$ sont verts, et les autres sont blancs. On tire successivement et sans remise n jetons. On note A l'événement « au moins un des jetons tirés est vert », et pour $k \in [\![1, n]\!]$, T_k l'événement « on tire pour la première fois un jeton vert au $k$ième tirage ».

1. Décrire un univers Ω adapté à l'expérience aléatoire, et donner son cardinal.
2. Calculer la probabilité de l'événement A.
3. Calculer $P(T_1), P(T_n)$.
4. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(T_k) = \dfrac{(4n-k)!(3n)!n}{(4n)!(3n-k+1)!}$.

Cours : primitives de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$; formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 3 (2017) [corrigé p.33-34]

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![m, n]\!]$.

1. Montrer que $E(X) = m + \displaystyle\sum_{k=m}^{n-1} P(X > k)$.
2. Une boîte contient n boules numérotées de 1 à n, que l'on tire avec remise jusqu'à ce que le numéro obtenu soit supérieur ou égal au précédent. On note X_n le rang correspondant.

(a) Montrer que $P(X_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.

(b) Calculer $E(X_n)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Cours : fonction ch, courbe représentative, bijection réciproque de sa restriction à $[0, +\infty[$.

Exercice 4 (2017) [corrigé p.36]

1. Donner l'expression du terme général de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$p_1 = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ p_{n+1} = \frac{1+5p_n}{6}.$$

2. Soit N dés équilibrés. On lance les dés simultanément. Soit X_1 le nombre de six obtenus au premier lancer. On retire du jeu les dés qui ont donné un six et on relance les autres. Soit X_2 le nombre de six obtenus au deuxième lancer, etc... Soit S_n le nombre de six obtenus après n lancers.

(a) Donner la loi de probabilité de S_1.

(b) Donner la loi de probabilité de S_2.

(c) Montrer que S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(N, p_n)$.

Cours : Donner la définition d'une matrice orthogonale, en donner au moins deux caractérisations, en donner les valeurs possibles pour le déterminant (preuve). Donner la définition d'une valeur propre et d'un espace propre d'une matrice carrée, cas des matrices orthogonales (preuve). Faire le lien avec les isométries, donner des exemples d'isométries de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 (2023) [corrigé]

On considère deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ où $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$P((X = i) \cap (y = j)) = p_{i,j} = \lambda\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Calculer λ.
2. Déterminer la loi de X, puis celle de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer l'espérance et la variance de X et Y.
5. Déterminer la loi de $X + Y$.

Cours : Formule de Taylor Young, développement limité de $\ln(1+x)$ en 0, tangente au point d'abscisse 0 de la courbe de $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$.

Exercice 6 (2019) [corrigé p.34]

Soit $(U_n)_{n\geq1}$, une suite de v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$ et $T_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$.

$$\text{On pose} \quad d_n(N) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si} \quad N \geq 2 \\ 0 & \text{si} \quad N = 1 \end{cases}.$$

1. Donner un équivalent de $\dfrac{d_n(N)}{N}$ lorsque N tend vers $+\infty$.

2. Monotonie, convergence et limite de $(d_n(N))_{n\geq 1}$.
3. Montrer que si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} P(Y > k)$.
4. Loi et espérance de T_n.

Cours : Donner une CNS pour qu'une matrice soit diagonalisable. Donner plusieurs application de la diagonalisation.

Exercice 7 (2019) [corrigé p.35]

1. On lance n pièces équilibrées. Soit X_n le nombre de "face".
   Montrer que la probabilité que $\dfrac{X_n}{n}$ s'éloigne de $\dfrac{1}{2}$ de moins de $0,1$ possède comme minorant $1 - \dfrac{1}{4n(0,1)^2}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
2. On suppose maintenant que X_n suit la loi binomiale de paramètres n, p.
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$.
3. Soit (X_i) une famille de variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres p_i respectivement. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right)$.

Cours : définition d'un minimum local d'une fonction réelle définie sur une ouvert U de $\mathbb{R}^2$, point critique, matrice Hessienne, recherche d'extrema.

Exercice 8 (2019) [corrigé]

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner le domaine de définition de $x \longmapsto x^a$.
2. Soit $\delta > 0$ et $a \in]0, 1[$. Montrer que $(1 + \delta)^a - 1 \leq \delta a$.
3. Soit $(a, p) \in]0, 1[^2$. Montrer que $\forall t \geq 0$, $pe^{ta} + 1 - p \leq e^{p(e^{ta}-1)}$.
4. Soit un entier $r \geq 2$, $(a_1, \ldots, a_r) \in]0, 1[^r$, $(p_1, \ldots, p_r) \in]0, 1[^r$ et $X_1, \ldots, X_r$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $p_1, \ldots, p_r$.
   Soit $Y = a_1X_1 + \cdots + a_rX_r$. Calculer $m = E(Y)$.
5. Montrer que pour tout $t > 0$, $P(Y > (1 + \delta)m) \leq e^{-t(1+\delta)m}E(e^{tY})$.
6. Montrer que pour tout $t > 0$, $P(Y > (1 + \delta)m) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{r} e^{p_i[e^{ta_i}-1-ta_i(1+\delta)]}$.
7. Dans cette question, on suppose que $a_1 = \ldots = a_r = a$ et $p_1 = \ldots = p_r = p$. Montrer que
$$P\left(\frac{Y}{r} > (1 + \delta)p\right) \leq e^{-rp[(1+\delta)\ln(1+\delta)-\delta]}$$

Cours : Définition de deux matrices semblables. Que dire de la trace et du polynôme caractéristique de deux matrices semblables ?