Préparation à l'oral : partie V

Sujets posés en 2025

Table des matières

1 Préparation à l'oral (II) de Mathématiques aux Arts et Métiers

Exercice 1 (2025, 2022) [corrigé en classe]

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-5t} - \mathrm{e}^{-7t}}{t}\mathrm{d}t$ et $I_{a,b} = \displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-5t} - \mathrm{e}^{-7t}}{t}\mathrm{d}t$, avec $0 < a < b$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Montrer que $I_{a,b} = \displaystyle\int_{5a}^{7a} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u - \int_{5b}^{7b} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{5b}^{7b} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. Montrer qu'il existe g bornée au voisinage de 0 telle que $\forall a > 0$,
$$\int_{5a}^{7a} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u = \ln\left(\frac{7}{5}\right) + \int_{5a}^{7a} g(u)\mathrm{d}u.$$
5. En déduire la valeur de I.

Exercice 2 (2025, 2023, 2015) [corrigé p.15-16]

1. Montrer que l'équation $4x^3 + x^2 - 1 = 0$ possède une seule solution réelle a et que l'on a : $1/2 < a < 2/3$. Dans la suite, on prendra $a \approx 0,56$.
2. Étudier et tracer la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t + \sqrt{|\cos t|} \end{cases}$.

   On justifiera la réduction de l'intervalle d'étude.

Exercice 3 (2025, 2024) [corrigé p.100-101]

Soit un entier $q \geq 2$. On pose $Q(X) = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $R = (X-1)Q$.

1. Montrer que 1 est racine de Q.
2. Montrer que si z est racine de Q alors $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$ et $|z| \leq 1$.
3. Montrer que $R(X) = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
4. Montrer que 1 est racine double de R et que les autres racines de R sont simples.
5. En déduire que Q n'admet que des racines simples.

Exercice 4 (2025) [corrigé p.16]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(e_n) : x^n + \cdots + x = 1$.

1. Montrer que l'équation (e_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note a_n.
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante, puis convergente. On note ℓ sa limite.
3. En calculant $a_n^{n+1} - 1$, déterminer la valeur de ℓ.
4. On pose $v_n = a_n - \ell$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Exercice 5 (2025, 2024) [corrigé]

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable ?
2. Trouver P inversible telle que $A = PTP^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Trouver les matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $MT = TM$.
4. Si $T = N^2$, vérifier que $NT = TN$.
5. Résoudre $M^2 = A$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ en posant $N = P^{-1}MP$.

Exercice 6 (2025, 2017) [corrigé p.14-15]

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, et l'événement E_λ : « X est divisible par 3 ».

1. Écrire $P(E_\lambda)$ comme somme d'une série.
2. Montrer que $g : \lambda \longmapsto P(E_\lambda)e^\lambda$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner $g(0)$ et $g'(0)$.
3. Montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
4. Déterminer $g(\lambda)$ pour tout $\lambda > 0$.
5. En déduire la limite de $P(E_\lambda)$ lorsque λ tend vers en $+\infty$.

Exercice 7 (2025, 2023) [corrigé]

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$. Établir la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.
2. Justifier que $\varphi_P : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'_P(x)$.
3. Soit l'application $f_x : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e_k = X^k$.
   (a) Déterminer $f_x(e_0)$ et donner le lien entre $f_x(e_k)$ et $f_x(e_{k-1})$.
   (b) Montrer que f_x induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Déterminer $\mathrm{Ker}(f_x)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 8 (2025) [1. fait en cours] et [2. fait en cours]

1. Montrer que $(A, B) \longmapsto \mathrm{tr}(AB^t)$ est un produits scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $f : A \longmapsto A^T$ est une symétrie orthogonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Préciser les espaces caractéristiques (base et direction).

Exercice 9 (2025)

Soient U_1, U_2 deux variables aléatoires indépendantes, de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
On pose $S = U_1 + U_2$.

1. Déterminer $\mathrm{P}(U_1 = k, S = n)$ suivant les valeurs de $k, n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la loi de S.
3. Simplifier les expression de $a(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ et $b(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)(n-1)x^{n-2}$.
4. Déterminer l'espérance de S.
5. Soit $D = U_2 - U_1$. Déterminer sa loi et son espérance.

Exercice 10 (2025)

Soit $E = \mathscr{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ et l'application v définie sur E par $v(f) = g$, avec $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x - t) f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que v induit un endomorphisme de E.
2. Trouver $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$.
3. Trouver les valeurs propres de v.

Exercice 11 (2025)

On rappelle que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y''(x) + y(x) = x^2$.
   Donner l'ensemble des solutions paires.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y''(x) - y(x) = \sin(x)$.
   Donner l'ensemble des solutions impaires.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $f''(x) + f(-x) = x^2 + \sin(x)$.

Exercice 12 (2025)

Soit f définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x\ln(5+\sin(x))$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur I et calculer sa dérivée.
2. Étudier le signe de f' et donner les variations de f en encadrant $g(x) = \ln(5+\sin(x))$ et $h(x) = \dfrac{1}{5+\sin(x)}$.
3. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J contenant 0, à préciser.
4. Déterminer le DL d'ordre 4 de f en 0.
5. Montrer que la réciproque de f sur J admet un DL d'ordre 4 en 0. Le calculer.

Exercice 13 (2025)

Soit $E = \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, $V = \{f \in E,\ f(1) = f(0) = 0\}$, $W = \{f \in E,\ f'' = f\}$ et

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \left[f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right] \mathrm{d}t.$$

1. Trouver une base de W.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
3. Montrer que $W^\perp = V$.
4. Calculer $\displaystyle\min_{g\in V} \int_0^1 \left[(g(t)-t)^2 + (g'(t)-1)^2\right] \mathrm{d}t$.

Exercice 14 (2025)

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle, on considère un rectangle ABCD.
Pour $r \in \mathbb{R}$ fixé, on pose :

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AM'} = r\overrightarrow{AM}$$

et M'' est l'image de M' par la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB).

indication : on prendra un repère orthonormé direct dans lequel on a :

$$A(0,0),\ B(1,0),\ C(1,\alpha),\ D(0,\alpha),\ \text{de sorte que } \|\overrightarrow{BC}\| = \alpha\|\overrightarrow{AB}\|.$$

1. Justifier que $A''B''C''D''$ est un rectangle.
2. Montrer que (BD''), (DB''), (CC'') sont concourantes en un point, noté K_r..
3. Montrer que K_r décrit une conique lorsque r décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (2025, 2024) [corrigé]

On pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t)\big)^n \mathrm{d}t$.

1. Montrer la convergence de l'intégrale u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. Montrer que : $u_{n+1} = 2[\ln(2)]^{n+1} - (n+1)u_n$.
4. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que : $u_n \leq [\ln(2-a)]^n + a[\ln(2)]^n$.
5. En posant $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, montrer que : $\dfrac{u_n}{(\ln 2)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
6. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

2 Préparation à l'oral de Mathématiques aux Mines-Télécom

Exercice 1 (2025, reconstitué) [1. corrigé p.1-2] et [2. corrigé en classe]

1. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t$.
   (a) À l'aide d'une domination locale, montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) À l'aide d'une domination locale, montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Calculer $F'(x)$.
   (d) Déterminer la limite de F en $+\infty$.
   (e) Calculer $F(x)$.

2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E unitaires vérifiant :
$$\forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2.$$
   Montrer que $\mathscr{B}$ est orthonormée et une base de E.

Exercice 2 (2025, incomplet) [1. corrigé p.3-4]

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} \mathrm{d}t$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de F.
   (b) Calculer $F(1)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$.

2. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $u(M) = -M + \mathrm{tr}(M) I_n$.
   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que -1 est valeur propre de u et déterminer la dimension de $E_{-1}(u)$.
   (c) Montrer que $n - 1$ est valeur propre de u. En déduire que u est diagonalisable.
   (d) Donner le déterminant et la trace de u.

Exercice 3 (2025, incomplet) [1. corrigé p.7-8-9]

1. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^t - 1} \mathrm{d}t$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Montrer que $\forall t > 0$, $\mathrm{e}^t \geq 1 + t$.
   (c) Par un encadrement, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (d) Par une minoration, déterminer la limite de f en -1.
   (e) Étudier les variations de f.

2. Dans l'espace, on considère les droites $D : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} z = 0 \\ x + y = a \end{cases}$.
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x, y, z)$ équidistants de D et D'.
   En donner une équation cartésienne.
   (b) Les points de $\mathcal{E}$ sont-ils réguliers ?
   Écrire une équation du plan tangent à $\mathcal{E}$ en un point régulier.

Exercice 4 (2025, incomplet) [1. corrigé p.10-11]

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n) + \sin(u_n) - 1$.
   (a) Montrer que (u_n) converge vers 0.
   (b) Donner la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.
   (c) Donner la nature de la série $\sum (u_n)^2$.
   (d) Que peut-on dire pour la série $\sum u_n$?

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que A est diagonalisable.
   (b) Vérifier que $A - 3I_n$ n'est pas inversible, puis déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.

Exercice 5 (2025, 2023, 2019) [1. corrigé]

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
   (a) Étudier la convergence de cette suite et trouver sa limite.
   (b) Étudier la convergence de la série $\sum u_n^2$.
   (c) Montrer que les séries $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n$ sont de même nature.
   (d) En déduire la nature de $\sum u_n$.

2. Soit l'application φ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \varphi(M) = \mathrm{tr}(M)I_2 - M$.
   (a) Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculer $\varphi(M)$.
   (b) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Écrire sa matrice dans la base canonique.
   (c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Exercice 6 (2025) [corrigé p.14]

1. (a) Résoudre $(E) : 2tz' - z = t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) À l'aide du changement de variables $\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & xy \\ v & = & \frac{x}{y} \end{array} \right.$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:
   $$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) + \frac{x}{y}.$$

2. (a) Loi géométrique (définition, espérance et variance).
   (b) Soit $X \sim \mathscr{G}(r)$ et $Y \sim \mathscr{G}(s)$ indépendantes. Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$.
   (c) Deux joueurs A et B lancent un jeton, simultanément et chacun dans leur coin. On note $X \sim \mathscr{G}(u)$ le rang du lancer où A gagne pour la première fois et $Y \sim \mathscr{G}(u)$ le rang du lancer où B gagne pour la première fois.

   Déterminer les valeurs de u telles que la probabilité que A et B gagnent en même temps soit supérieure à celle que l'un gagne avant l'autre.

Exercice 7 (2025) [corrigé p.15]

1. On pose $F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \sin(ax)\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que F est définie et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \sin(ax)\mathrm{d}x$.

2. Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
   (a) Trouver l'espérance de $Y = X^2 + 1$.
   (b) Calculer $\mathrm{P}(2X < Y)$.
   (c) Calculer la probabilité que X soit pair. Y a-t-il plus de chance que X soit pair ou impair ?

3 Préparation à l'oral (I) de Mathématiques à l'ENS Paris-Saclay

Exercice 1 (2025) [1. corrigé p.5-6]

Soit $a \in \mathbb{R}$ et, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $Q_k(X) = (X-a)^k$.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)P(t)\mathrm{d}t & \text{si} \quad x \neq a \\ \frac{P(x)}{2} & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

et $\Psi_a(P(X)) = 2P(X) + (X-a)P'(X)$.

1. Montrer que Ψ_a induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de Ψ_a dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Déterminer les valeurs propres de Ψ_a. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?
   (b) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\Psi_a(Q_k(X))$.
   En déduire une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Ψ_a.
   (c) Exprimer $(X-a)^2 P'(X)$ en fonction de $\Psi_a(P(X))$.
4. Montrer que Φ_a induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Montrer que $\Phi_a = (\Psi_a)^{-1}$. Étudier la diagonalisabilité de Φ_a.

Cours : donner la définition monofocale d'une conique, donner l'équation implicite générale d'une conique, représenter graphiquement les coniques en précisant les caractéristiques géométriques, expliciter la méthode générale pour étudier une conique à partir de son équation implicite $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Exercice 2 (2025) [corrigé p.12-13]

1. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi (at + bt^2)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.
2. Soit $t \neq 0[2\pi]$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Cours : parler des symétries (définition, caractérisation, symétries orthogonales, cas général, dans le plan et dans l'espace).

Exercice 3 (2025)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi définie par :

$$X_i(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ et } \mathrm{P}(X_i = 1) = p,\ p \in]0, 1[.$$

On pose $Y_n = \displaystyle\prod_{i=1}^n X_i$ et $p_n = \mathrm{P}(Y_n = 1)$.

1. Déterminer la loi de Y_2 et de Y_3.
2. Trouver une relation entre p_n et p_{n+1}, puis p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Trouver les valeurs de p pour lesquelles Y_{n+1} et Y_n sont indépendantes.
   On pourra remarquer que $Y_{n+1} \perp\!\!\!\perp Y_n$ ssi $\mathrm{P}(Y_{n+1}=1, Y_n=1) = \mathrm{P}(Y_{n+1}=1)\mathrm{P}(Y_n=1)$.
4. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Donner la loi, l'espérance et la variance de S_n.
   On pourra remarquer que $N_i = \dfrac{X_i+1}{2}$ suit une loi binomiale.

Cours : définition de la courbure d'une courbe paramétrée, expression angulaire, déterminer la courbure d'un cercle.

Exercice 4 (2025, incomplet)

Soit E l'espace $\mathbb{C}^4$ et u, v deux endomorphismes de E vérifiant :

$$u \circ u = v \circ v = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad u \circ v = -v \circ u.$$

1. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(v) = 0$.
2. Montrer que u et v sont diagonalisables, préciser les valeurs propres et les multiplicités.
3. Soit (e_1, e_2) une base de $E_1(u)$. Montrer que $(v(e_1), v(e_2))$ est une base de $E_{-1}(u)$.

Cours : théorème de Taylor-Young et application à $\ln(1+x)$.

Exercice 5 (2025, reconstitué)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$.

1. Calculer T_0, T_1, T_2, T_3, T_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme.
   Préciser son degré et son coefficient dominant.
3. Montrer que $(P, Q) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Montrer que $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

Cours : définition et continuité de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Exercice 6 (2025, incomplet)

Soit E, un espace vectoriel de dimension n et $f_1, \ldots, f_p$ des formes linéaires non nulles sur E.
On considère l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f_i)$ est un hyperplan de E.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \cap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_i)$.
3. Montrer que f est surjective ssi $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre.
4. Si f est surjective, quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$?
5. Soit $F : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x-y+3z & = & 0 \\ x-5y+3z & = & 0 \end{array} \right.$. Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. En donner la dimension.

Cours : inégalité de Markov, pourquoi ça ne marche pas si $X < 0$?