**Feuille d'exercices n°14**

# Fonctions de plusieurs variables

**Exercice 1 :** *domaine de définition*

Représenter le domaine de définition de $f$, puis préciser si il est ouvert, fermé et/ou borné :

a) $f(x,y) = \ln(x) + \ln(y) + \ln(x-y+1)$ ; b) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-2y^2}$ ;

c) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{9-x^2}{4-y^2}}$ ; d) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

**Exercice 2 :** *prolongement par continuité*

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en $(0,0)$ ?

a) $f(x,y) = (1+x^2)\dfrac{\sin(y)}{y}$ ; b) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^{xy}-1}{x^2+y^2}$.

**Exercice 3 :** *plan tangent à une surface*

Donner une équation du plan tangent à $S : z = f(x,y)$ au point $A$ et un vecteur normal à ce plan :

a) $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$ et $A(1,1,5)$ ; b) $f(x,y) = \cos(x-y)$ et $A\left(\dfrac{\pi}{2}, 0, 0\right)$.

**Exercice 4 :** *fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$* [correction]

Soient $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = \sin^2(x) + \cos^2(y) + z^2$.

Montrer que $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer le DL d'ordre 1 de $f$ en $(x_0, y_0, z_0)$.

**Exercice 5 :** *champ vectoriel qui dérive d'un potentiel scalaire*

Dans chaque cas, déterminer les fonctions $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :

a) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sur $U = \mathbb{R}^2$ ; b) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y + 2x + y^3 \\ x^3 + 3xy^2 - 2y \end{pmatrix}$ sur $U = \mathbb{R}^2$ ;

**Exercice 6 :** *fonctions harmoniques* [correction]

On dit qu'une fonction $f$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ est harmonique si elle vérifie :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(laplacien nul).}$$

Les fonctions suivantes sont-elles harmoniques ?

a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ ; b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ ; c) $f(x,y) = \mathrm{e}^x\cos(y) - \mathrm{e}^y\cos(x)$.

**Exercice 7 :** *des dérivées partielles secondes non continues - d'après oral II 2018*

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

1. Étudier la continuité de $f$ et celle de ses dérivées partielles premières.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut-on en déduire pour $f$ ?

**Exercice 8 :** *droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés* [correction]

Soient $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ des points "presque alignés". On cherche $(\widehat{a},\widehat{b}) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad y_i \approx \widehat{a}x_i + \widehat{b}$$

Après avoir justifié son existence, déterminer $(\widehat{a},\widehat{b}) \in \mathbb{R}^2$ qui minimise $\delta(a,b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$.

**Exercice 9 :** *approximation affine en moyenne quadratique - d'après oral I 2018* [correction]

1. Prouver que $x \longmapsto \ln(x)$, $x \longmapsto x\ln(x)$ et $x \longmapsto (\ln(x))^2$ sont intégrables sur $]0,1]$.
2. Déterminer le domaine de définition de $f : (a,b) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 (\ln(t) - a - bt)^2 \mathrm{d}t$.
3. Calculer $f(a,b)$ et montrer que $f$ admet un extremum local. Préciser sa valeur et sa nature.

**Exercice 10 :** *un problème d'optimisation* [correction]

On se propose de déterminer les triangles de périmètre donné et d'aire maximale.

Soit $ABC$ un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ les longueurs de ses côtés, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les mesures de ses angles aux sommets, $p$ son demi-périmètre et $S$ sa surface.

1. Montrer que $S = \dfrac{1}{2}bc\sin(\widehat{A})$ et la "formule d'Al Kashi" : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$.
2. En déduire la "formule de Heron" : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
3. Résoudre le problème en prenant les côtés $a$ et $b$ pour variables et en étudiant $f(a,b) = \dfrac{S^2}{p}$.

**Exercice 11 :** *étude d'une fonction intégrale à deux paramètres - d'après oral II 2023*

On pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $F(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale $I_n$ converge et exprimer $I_{n+2}$ en fonction de $I_n$.
2. Calculer $I_{2p+1}$ et $I_{2p}$ pour tout $p \geq 0$.
3. Calculer $F(x,y)$. En déduire que $F$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Trouver les points critiques de $F$ et trouver leur nature.

**Exercice 12 :** *nature des points critiques* [correction]

Dans chaque cas, étudier la nature des points critiques de $f$ sur $\mathbb{R}^2$ :

1. a) $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$ ; b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$ ;
2. a) $f(x,y) = x^3 + y^3$ ; b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$.

**Exercice 13 :** *recherche d'extrema sur un fermé borné*

Dans chaque cas, déterminer les extremums globaux de $f$ sur $D$ :

1. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;
2. $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ et $D = [0, \pi/2]^2$.

**Exercice 14 :** *un extremum local non global - d'après oral II 2018*

1. Soit $g(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2$.

   Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et admet un point critique.
   Prouver que $g$ admet un minimum local. Est-ce un minimum global ?

2. Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée ne s'annulant qu'en $a$, $f(a)$ étant un minimum local. On suppose qu'il existe $x > a$ tel que $f(x) < f(a)$.

   Montrer qu'il existe $b \in ]a, x[$ tel que $f(b) = f(a)$. En déduire que $f(a)$ est un minimum global.

**Exercice 15 :** *nature des points critiques - d'après oral II 2016*

Pour tout couple $(x,y)$ de réels strictement positifs, $f(x,y) = (x+y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

1. Montrer les égalités : $f(x,y) = 2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{(x+y)^2}{xy}$.
2. Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^2$ et déterminer ses points critiques.
3. Calculer les dérivées partielles secondes de $f$.
4. Comparer $(x+y)^2$ et $xy$. En déduire la nature des points critiques de $f$.

**Exercice 16 :** *étude des extremums - d'après oral I 2022* [correction]

Soit $f(x,y) = \dfrac{1}{4}(x+y)^2 - \dfrac{1}{6}(x^3 + y^3)$.

1. Limite de $f(x,0)$ en $\pm\infty$ ? $f$ admet-elle des extremums globaux ?
2. Équivalent simple de $f(x, -x + x^3)$ en $0$ ? $f$ admet-elle un extremum en $(0,0)$ ?
3. Étudier les extremums locaux de $f$.
4. Déterminer les extremums de $f$ sur $[0,1]^2$.

**Exercice 17 :** *EDP d'ordre 1 et coordonnées polaires*

À l'aide d'un passage en coordonnées polaires, déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

**Exercice 18 :** *EDP d'ordre 1 - d'après oral II 2017*

Soit $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $\varphi$ l'application de $D$ dans $D$ définie par $\varphi(x,y) = \left(x, \dfrac{y}{x}\right)$.

1. Montrer que $\varphi$ est une bijection de $D$ sur $D$, de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa fonction réciproque.
2. Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D$, vérifiant : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. On pose $g = f \circ \varphi^{-1}$.

   Trouver l'équation vérifiée par $g$ et la résoudre. En déduire $f$.

**Exercice 19 :** *EDP d'ordre 2* [correction]

À l'aide du changement de variable $(u,v) = (xy, x/y)$, déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

**Exercice 20 :** *EDP d'ordre 2 - d'après maths C 2016 Partie I 2.* [correction]

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \quad (2x - y^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 16\varphi = 0.$$

sur le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 < 2x\}$.

1. Représenter $D$, on admettra qu'il s'agit d'un ouvert.
2. Soit $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On considère l'application $h$ définie sur $\Delta$ par $h(u,v) = \left(\dfrac{u^2+v^2}{2}, v\right)$.
   Justifier, en explicitant sa réciproque, que $h$ est une bijection de $\Delta$ sur $D$, puis montrer que $h$ et $h^{-1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leurs domaines de définition respectifs.
3. Montrer que la fonction $\varphi$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $D$, est solution de $(E)$ sur $D$ si, et seulement si, la fonction $\psi$ définie sur $\Delta$ par $\psi(u,v) = \varphi \circ h(u,v)$ est solution sur $\Delta$ de

$$(E') : \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 16\psi = 0.$$

4. Déterminer toutes les fonctions $\psi$ solutions de $(E')$ sur $\Delta$. Résoudre $(E)$ sur $D$.

# Quelques corrections pour s'entrainer

**Exercice 4 :** *fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$* [énoncé]

$f:(x,y,z)\longmapsto \sin^2(x)+\cos^2(y)+z^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, comme somme de fonctions qui le sont (ou d'après les théorèmes généraux). De plus, pour tout $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=\sin(2x_0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)=-\sin(2y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=2z_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0+h,y_0+k,z_0+l) \underset{(0,0,0)}{=} & \sin^2(x_0)+\cos^2(y_0)+z_0^2 \\ & +\sin(2x_0)h-\sin(2y_0)k+2z_0l+o\left(\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right). \end{aligned}}$$

**Exercice 6 :** *fonctions harmoniques* [énoncé]

a) Pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2,\ x^2+y^2>0$. Donc $f:(x,y)\longmapsto \ln(x^2+y^2)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U=(\mathbb{R}^*)^2$ comme composée de fonctions qui le sont (ou par les théorèmes généraux).

De plus, pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

Donc $\boxed{f \text{ est harmonique}}$.

b) Pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2,\ x^2+y^2\neq 0$. Donc $f:(x,y)\longmapsto \dfrac{1}{x^2+y^2}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U=(\mathbb{R}^*)^2$ comme inverse d'une fonction $\mathscr{C}^2$ dont le dénominateur ne s'annule pas (ou par les théorèmes généraux).

De plus, pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{6x^2-2y^2}{(x^2+y^3)^3}+\frac{6y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^3}=\frac{4}{(x^2+y^2)^2}\neq 0.$$

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas harmonique}}$.

c) $f:(x,y)\longmapsto \mathrm{e}^x\cos(y)-\mathrm{e}^y\cos(x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U=\mathbb{R}^2$ comme somme de produits de fonctions qui le sont (ou par les théorèmes généraux).

De plus, pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\mathrm{e}^x\cos(y)+\mathrm{e}^y\sin(x),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\mathrm{e}^x\sin(y)-\mathrm{e}^y\cos(x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\mathrm{e}^x\cos(y)+\mathrm{e}^y\cos(x)-\mathrm{e}^x\cos(y)-\mathrm{e}^y\cos(x)=0.$$

Donc $\boxed{f \text{ est harmonique}}$.

**Exercice 8 :** *droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés* [énoncé]

Soient $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ des points de $\mathbb{R}^2$ donnés. On pose

$$\delta(a,b)=\sum_{i=1}^n (y_i-ax_i-b)^2=\|Y-aX-bU\|^2,\text{ où } Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle X,Y\rangle=X^TY=Y^TX$.

On pose $F=\operatorname{Vect}(X,U)$. D'après le théorème de la projection orthogonale,

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\delta(a,b)=\|Y-p_F(Y)\|,\text{ où } p_F(Y)=\widehat{a}X+\widehat{b}U\in F,\ (\widehat{a},\widehat{b})\in\mathbb{R}^2,$$

est le projeté orthogonal de $Y$ sur $F$.

Ainsi, la fonction $\delta:(a,b)\longmapsto\delta(a,b)$ admet un minimum dans $\mathbb{R}^2$ atteint en $(\widehat{a},\widehat{b})\in\mathbb{R}^2$.

La fonction $\delta$ (polynomiale en $a$ et $b$) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (ouvert de $\mathbb{R}^2$) donc

$$\nabla f(\widehat{a},\widehat{b})=\vec{0}\iff\left\{\begin{array}{rcl}-2\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i(y_i-\widehat{a}x_i-\widehat{b})&=&0\\ -2\displaystyle\sum_{i=1}^n(y_i-\widehat{a}x_i-\widehat{b})&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\widehat{a}+\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)\widehat{b}&=&\displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i\\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)\widehat{a}+n\widehat{b}&=&\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i\end{array}\right.$$

On trouve $\boxed{\widehat{a}=\dfrac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i-\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}\quad\text{et}\quad\widehat{b}=\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i\right)-\widehat{a}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)}$.

**Exercice 9 :** *approximation affine en moyenne quadratique - d'après oral I 2018* [énoncé]

1. $x\longmapsto\ln(x)$, continue et de signe constant sur $]0,1]$, est intégrable sur $]0,1]$ d'après le cours.

   $x\longmapsto x\ln(x)$ est continue sur $]0,1]$ comme produit de fonctions qui le sont et pour tout $x\in]0,1]$,
   $$|x\ln(x)|=\underbrace{|x|}_{\leq 1}|\ln(x)|\leq|\ln(x)|.$$
   $x\longmapsto\ln(x)$ est intégrable sur $]0,1]$ donc, par comparaison de fonctions intégrables,

   $\boxed{x\longmapsto x\ln(x)\text{ est intégrable sur }]0,1]}$.

   $x\longmapsto(\ln(x))^2$ est continue sur $]0,1]$ comme produit de fonctions qui le sont et pour tout $x\in]0,1]$,
   $$\sqrt{x}(\ln(x))^2=(x^{\frac{1}{4}}\ln(x))^2\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}0\ \text{(par croissance comparée) donc }(\ln(x))^2\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ donc, par comparaison de fonctions intégrables,

$\boxed{x \longmapsto (\ln(x))^2 \text{ est intégrable sur } ]0,1]}$.

2. On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 (\ln(x))^2\mathrm{d}x$ convergent et, par linéarité de l'intégrale en cas de convergence, on a : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \int_0^1 (\ln(x))^2\mathrm{d}x + \int_0^1 (a+bx)^2\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \ln(x)(a+bx)\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\int_0^1 (\ln(x))^2\mathrm{d}x}_{CV} + \underbrace{\int_0^1 (a^2+2abx+b^2x^2)\mathrm{d}x}_{CV} - 2a\underbrace{\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x}_{CV} - 2b\underbrace{\int_0^1 x\ln(x)\mathrm{d}x}_{CV}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^2}$.

3. De plus, on a : $\displaystyle\int_0^1 (a^2+2abx+b^2x^2)\mathrm{d}x = \left[a^2x + abx^2 + \frac{b^2}{3}x^3\right]_0^1 = a^2 + ab + \frac{b^2}{3}$,

$\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_0^1 = -1$, et par intégration par parties, en cas de convergence,

$$\int_0^1 x\ln(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_0^1}_{=0 \text{ par C.C.}} - \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 (\ln(x))^2\mathrm{d}x = \underbrace{[(x\ln(x)-x)\ln(x)]_0^1}_{=0 \text{ par C.C.}} - \int_0^1 (\ln(x)-1)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1+1 = 2.$$

Donc $\boxed{f(a,b) = 2 + a^2 + ab + \dfrac{b^2}{3} + 2a + \dfrac{b}{2},\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2}$. $f$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, car polynomiale, et

$$\nabla f(a,b) = \vec{0} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2a+b+2 &=& 0 \\ a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{2} &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2a+b &=& -2 \\ 6a+4b &=& -3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -\frac{5}{2} \\ b &=& 3 \end{array}\right.$$

Donc $f$ admet pour unique point critique le point $\left(-\dfrac{5}{2}, 3\right)$. De plus, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b) = \frac{2}{3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a,b) \underset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a}(a,b) = 1.$$

$\det\left(H_f\left(-\dfrac{5}{2},3\right)\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \dfrac{4}{3} - 1 > 0$ et $\operatorname{tr}\left(H_f\left(-\dfrac{5}{2},3\right)\right) = 2 + \dfrac{2}{3} > 0$,

donc $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } \left(-\dfrac{5}{2},3\right) \text{ de valeur } f\left(-\dfrac{5}{2},3\right) = \dfrac{1}{4}}$.

**Exercice 10 :** *un problème d'optimisation* [énoncé]

1. Soit $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur la droite $(AB)$. On a :

$$S = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{c \times CH}{2} \ \text{ et } \ \sin(\widehat{A}) = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{b}.$$

Donc $\boxed{S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A})}$. De plus, on a :

$$a^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

D'où la "formule d'Al Kashi" : $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})}$.

2. $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ et on a :

$$p(p-a) = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc - b^2 - c^2 + 2bc\cos(\widehat{A})}{4},$$

par la formule d'Al Kashi. Donc $p(p-a) = \dfrac{bc(1+\cos(\widehat{A}))}{2}$. De même,

$$(p-b)(p-c) = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4} = \frac{a^2 - (c-b)^2}{4} = \dots = \frac{bc(1-\cos(\widehat{A}))}{2}.$$

Donc $p(p-a)(p-b)(p-c) = \dfrac{(bc)^2(1-\cos^2(\widehat{A}))}{4} = \dfrac{(bc)^2\sin^2(\widehat{A})}{4} \geq 0$.

La mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{A}$ étant entre 0 et 180, $\sin(\widehat{A}) \geq 0$.

De plus, $bc \geq 0$. D'où la "formule de Heron" : $\boxed{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = S}$.

3. Si un des côtés du triangle est nul alors le triangle est applati et $S = 0$ (non maximale).

On suppose donc que $a, b, c > 0$. Rappelons que l'on cherche les triangles de demi-périmètre $p > 0$ donné et de surface maximale. On a :

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ donc } c = 2p - a - b > 0 \text{ et donc } a + b < 2p.$$

Comme indiqué, on étudie la fonction $f$ définie par

$$f(a,b) = \frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c) = (p-a)(p-b)(a+b-p).$$

$f$ est $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a > 0, \ b > 0 \text{ et } a+b < 2p\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale) et pour $(a,b) \in U$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) &= -(p-b)(a+b-p) + (p-a)(p-b) = (p-b)(2p-2a-b) \\
\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) &= -(p-a)(a+b-p) + (p-a)(p-b) = (p-a)(2p-2b-a).
\end{aligned}$$

De plus, si $f$ admet un extremum local en un point de $U$ alors celui-ci est un point critique.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (p-b)(2p-2a-b) = 0 \\ (p-a)(2p-2b-a) = 0 \end{cases}$$

Si $b=p$ et $a=p$ alors $c=2p-a-b=0$ : ce qui est exclus.

Si $b=p$ et $2p-2b-a=0$ alors $a=0$ : ce qui est exclus.

Si $a=p$ et $(2p-2a-b)$ alors $b=0$ : ce qui est exclus.

Donc les points critiques de $f$ dans $U$ vérifient : $\begin{cases} 2p-2a-b=0 \\ 2p-2b-a=0 \end{cases} \iff a=b=\dfrac{2p}{3}$.

Comme $\left(\dfrac{2p}{3},\dfrac{2p}{3}\right)\in U$, $f$ admet pour unique point critique dans $U$, le point $\left(\dfrac{2p}{3},\dfrac{2p}{3}\right)$.

De plus, $f$ est $\mathscr{C}^2$ sur $U$ (car polynomiale) et pour $(a,b)\in U$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) &= -2(p-b)=2b-2p, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b)=2a-2p, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}(a,b) &\underset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial b\partial a}(a,b)=-(2p-2a-b)-(p-b)=2a+2b-3p. \end{aligned}$$

La matrice Hessienne de $f$ en $\left(\dfrac{2p}{3},\dfrac{2p}{3}\right)$ est $H=\begin{pmatrix} -\frac{2p}{3} & -\frac{p}{3} \\ -\frac{p}{3} & -\frac{2p}{3} \end{pmatrix}$ et vérifie :

$$\det(H)=\frac{p^2}{9}>0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(H)=-\frac{4p}{3}<0.$$

Donc $f$ admet pour unique extremum local dans $U$, un maximum local atteint en $\left(\dfrac{2p}{3},\dfrac{2p}{3}\right)$, de valeur $f\left(\dfrac{2p}{3},\dfrac{2p}{3}\right)=\left(\dfrac{p}{3}\right)^3>0$.

Notons que $f$ est continue sur $K=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \;/\; a\geq 0,\ b\geq 0 \text{ et } a+b\leq 2p\right\}$ qui est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. Par le théorème des bornes, $f$ admet un maximum absolu sur $K$. Pour $(a,b)\in K$, on a :

$$f(0,b)=-p(p-b)^2\leq 0,\ f(a,0)=-p(p-a)^2\leq 0 \text{ et}$$

si $a+b=2p$ alors $f(a,b)=-p(p-a)^2\leq 0$. Donc ce maximum absolu est atteint à l'intérieur de $K$, c'est à dire dans $U$ et c'est la valeur trouvée ci-dessus.

Finalement, il existe un unique triangle de périmètre $2p$ donné et d'aire maximale.

Il a pour côtés $\boxed{a=b=c=\dfrac{2p}{3} \quad \text{(triangle équilatéral)}}$.

**Exercice 12 :** *nature des points critiques* [énoncé]

1. (a) $f:(x,y)\longmapsto 2x^2y+2x^2+y^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynômiale. Sa matrice hessienne est symétrique réelle et donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

   Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\nabla f(x,y)=\vec{0} \iff \begin{cases} 4x(y+1) &= 0 \\ 2(x^2+y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y &= -1 \\ x^2 &= 1 \end{cases}.$$

Donc $\boxed{\text{les points critiques de } f \text{ sont } (0,0),\ (-1,-1) \text{ et } (1,-1)}$. De plus,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4(y+1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \underset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4x.$$

$\det\left(H_f(0,0)\right) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$ et $\operatorname{tr}\left(H_f(0,0)\right) = 6 > 0$,

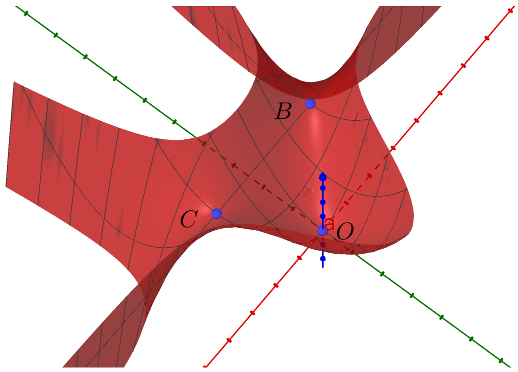
donc $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } (0,0) \text{ de valeur } f(0,0) = 0}$.

$\det\left(H_f(-1,-1)\right) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -16 < 0$,

Donc $\boxed{f \text{ admet un point col en } (-1,-1) \text{ de valeur } f(-1,-1) = 1}$.

$\det\left(H_f(1,-1)\right) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -16 < 0$,

donc $\boxed{f \text{ admet un point col en } (1,-1) \text{ de valeur } f(1,-1) = 1}$.




(b) $f : (x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - (x-y)^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynômiale. Sa matrice hessienne est symétrique réelle et donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x^3 - 2(x-y) & = & 0 \\ 4y^3 + 2(x-y) & = & 0 \end{array} \right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} 4x^3 - 2(x-y) & = & 0 \\ 4(x^3 + y^3) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x^3 - 2(x-y) & = & 0 \\ y^3 & = & (-x)^3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x(x^2-1) & = & 0 \\ y & = & -x \end{array} \right. .$$

Donc $\boxed{\text{les points critiques de } f \text{ sont } (0,0),\ (-1,1) \text{ et } (1,-1)}$. De plus,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \underset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2.$$

$\det\left(H_f(0,0)\right) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ et on ne peut rien en déduire.

Si $x \in ]-1,1[\setminus\{0\}$ alors $f(x,x) = 2x^2 > 0 = f(0,0)$ et $f(x,-x) = 2x^2(x^2-2) < 0 = f(0,0)$.

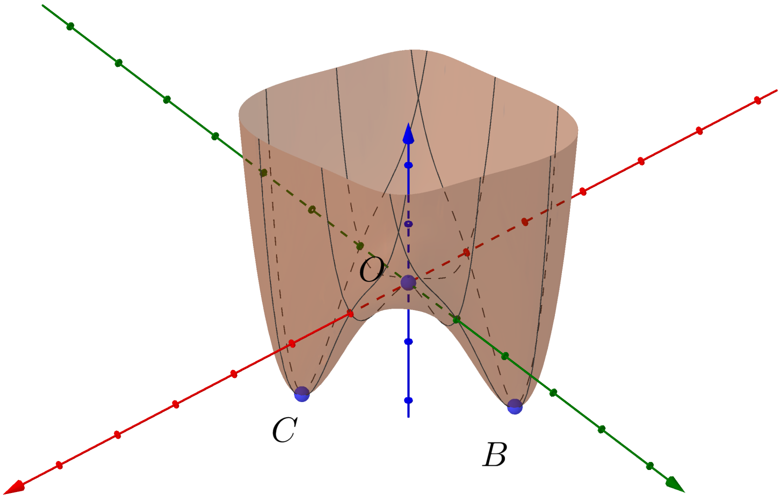
Donc $\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local au point critique } (0,0), \text{ c'est un point col}}$.

$\det\left(H_f(-1,1)\right) = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 96 > 0$ et $\operatorname{tr}\left(H_f(-1,1)\right) = 20 > 0$,

donc $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } (-1,1) \text{ de valeur } f(1,-1) = -2}$.

$$\det\left(H_f(1,-1)\right) = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 96 > 0 \text{ et } \operatorname{tr}\left(H_f(1,-1)\right) = 20 > 0,$$

donc $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } (1,-1) \text{ de valeur } f(1,-1) = -2}$.




2. (a) Il est facile de trouver que $(0,0)$ est l'unique point critique de $f : (x,y) \longmapsto x^3 + y^3$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, car polynomiale.

   De plus, $f(x,x) = 2x^3 > 0 = f(0,0)$ si $x > 0$ et $f(x,x) = 2x^3 < 0 = f(0,0)$ si $x < 0$. Notons que $f(-x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Donc $\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local en } (0,0)}$.

   (b) $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 + x^3$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynômiale. Sa matrice hessienne est symétrique réelle et donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(2+3x) & = & 0 \\ 2y & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{2}{3} \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

   Donc $\boxed{\text{les points critiques de } f \text{ sont } (0,0) \text{ et } \left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)}$. De plus,

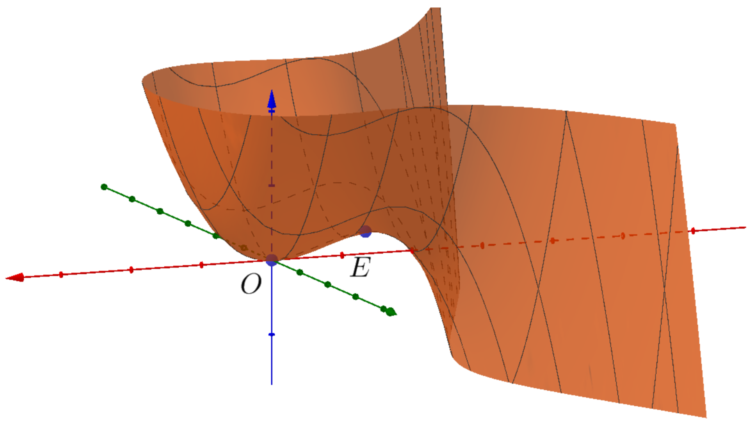
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \underset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.$$

$$\det\left(H_f(0,0)\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \operatorname{tr}\left(H_f(0,0)\right) = 4 > 0,$$

   donc $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } (0,0) \text{ de valeur } f(0,0) = 0}$.

$$\det\left(H_f\left(-\frac{2}{3}, 0\right)\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

   donc $\boxed{f \text{ admet un point col en } \left(-\dfrac{2}{3}, 0\right) \text{ de valeur } f\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right) = \dfrac{4}{27}}$.




**Exercice 16 :** *étude des extremums - d'après oral I 2022* [énoncé]

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 \underset{\pm\infty}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) = -\infty}$.

   On en déduit que $\boxed{f \text{ n'admet ni minimum global, ni maximum global}}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x,-x+x^3) = \dfrac{1}{4}x^6 - \dfrac{1}{6}\left(x^3 + (x^3-x)^3\right) = \dfrac{1}{4}x^6 - \dfrac{1}{6}\left(x^9 - 3x^7 + 3x^5\right)$.

   Donc $\boxed{f(x,-x+x^3) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}x^5}$, qui change de signe en 0. Comme $f(0,0)=0$, on en déduit que

   $\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local (et encore moins global) en } (0,0)}$.

3. $f$, polynomiale, est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, ouvert. Donc, si $f$ admet un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, alors c'est un point critique :

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}x^2 &= 0 \\ \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}y^2 &= 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow 2(L_2 - L_1)}{\iff} \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}x^2 &= 0 \\ x^2 - y^2 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 &= 0 \\ y &= x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 &= 0 \\ y &= -x \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 2 \\ y &= 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}.$$

   Donc $f$ admet pour points critiques, les points $O(0,0)$ et $A(2,2)$. De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{2} - x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{2} - y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \underset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{2}.$$

   Notons que $\det\left(H_f(0,0)\right) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 0$ et qu'on ne peut rien en déduire.

   Mais d'après 2., $f$ n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

   $\det\left(H_f(2,2)\right) = \begin{vmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{vmatrix} = 2 > 0$ et $\operatorname{tr}\left(H_f(2,2)\right) = -3 < 0$,

   donc $\boxed{f \text{ admet un maximum local en } (2,2) \text{ de valeur } f(2,2) = \dfrac{4}{3}}$.

4. $f$ est continue sur $[0,1]^2$, qui est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après le théorème des bornes atteintes, $f$ admet un maximum (global) et un minimum (global) sur $[0,1]^2$. Étudions la variation de $f$ sur chaque segment de son bord (ou sa frontière) :

 • $\varphi_1(x) = f(x,0) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3$ est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, on a :

$$\varphi_1'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x(1-x) \geq 0,$$

 s'annule pour $x = 0$ ou $x = 1$. Donc, sur $[0,1]$, $\varphi_1$ est strictement croissante, admet pour minimum $\varphi_1(0) = 0$ et pour maximum $\varphi_1(1) = \dfrac{1}{12}$.

 • $\varphi_2(y) = f(1,y) = \dfrac{1}{4}(1+y)^2 - \dfrac{1}{6}(1+y^3)$ est dérivable sur $[0,1]$ et pour $y \in [0,1]$, on a :

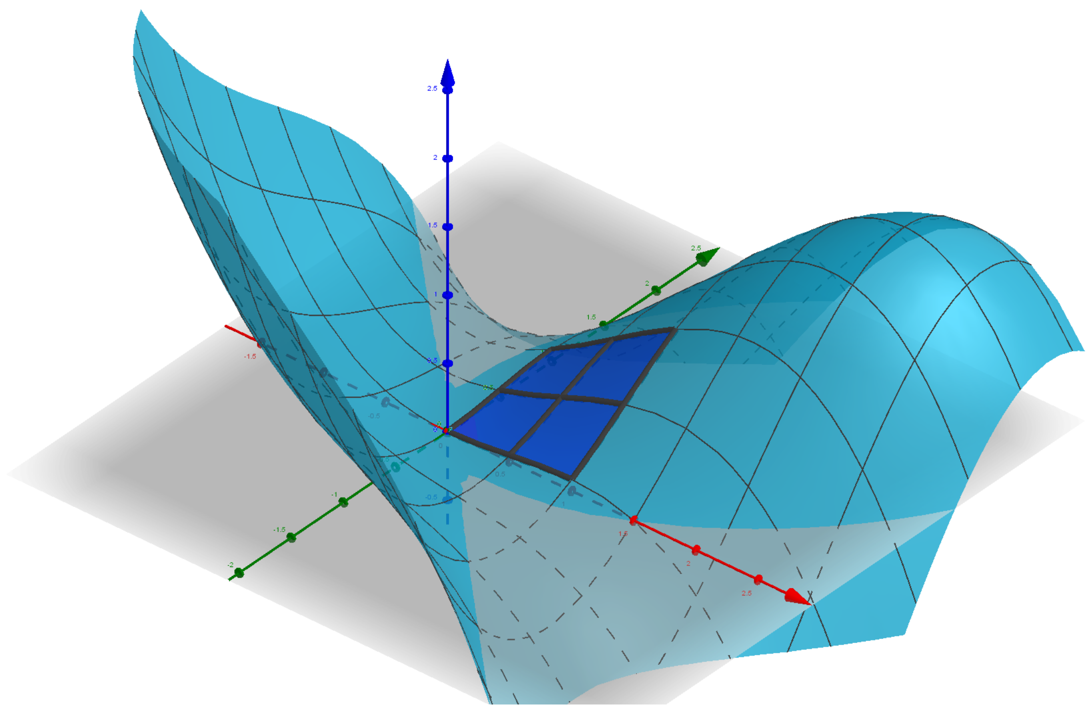
$$\varphi_2'(y) = \frac{1}{2}(1+y) - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(1+y-y^2) > 0,$$

 car $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$. Donc, sur $[0,1]$, $\varphi_2$ est strictement croissante, admet pour minimum $\varphi_2(0) = \dfrac{1}{12}$ et pour maximum $\varphi_2(1) = \dfrac{2}{3}$.

 • Comme $f(x,y) = f(y,x)$, $\varphi_3(x) = f(x,1)$ a les mêmes extremums sur $[0,1]$ que $\varphi_2(y)$ et $\varphi_4(y) = f(0,y)$ a les mêmes extremums sur $[0,1]$ que $\varphi_1(x)$.

 En conclusion, comme $(2,2) \notin [0,1]^2$, $\boxed{\text{le maximum de } f \text{ sur } [0,1]^2 \text{ est } f(1,1) = \dfrac{2}{3}}$,

 et $\boxed{\text{le minimum de } f \text{ sur } [0,1]^2 \text{ est } f(0,0) = 0}$.



**Exercice 19 :** *EDP d'ordre 2* [énoncé]

La fonction $\Phi : (x,y) \longmapsto (xy, x/y)$ est $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$(u,v) = \Phi(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \iff (x,y) = (\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}),\ (u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

Donc le changement de coordonnées $\Phi$ est bijectif de $U$ dans $U$, de réciproque $\Phi^{-1} : (u,v) \longmapsto (\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$ également $\mathscr{C}^2$ sur $U$. On pose $F(u,v) = f \circ \Phi^{-1}(u,v) = f(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) = f(x,y)$, où $f$ est $\mathscr{C}^2$ sur $U$.
Par la règle de la chaine, $F$ est $\mathscr{C}^2$ sur $U$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial F}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial F}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\left(y\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}\right) + \frac{1}{y}\left(y\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\left(x\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}\right) + \frac{2x}{y^3}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{x}{y^2}\left(x\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right).$$

Par le théorème de Schwarz, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ et on a :

$$\begin{aligned}
x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad &\iff \quad 4x^2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - 2\frac{x}{y}\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \\
&\underset{\div 4x^2>0}{\iff} \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{1}{2u}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) = 0 \quad (\text{car } u = xy) \\
&\iff \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \psi(v)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(u)} = \psi(v)\sqrt{u},\ \psi : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R},\ \mathscr{C}^1 \\
&\iff \quad F(u,v) = \Psi(v)\sqrt{u} + \Gamma(u),\ \Psi, \Gamma : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R},\ \mathscr{C}^2 \\
&\iff \quad \boxed{f(x,y) = \Psi(x/y)\sqrt{xy} + \Gamma(xy),\ \Psi, \Gamma : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R},\ \mathscr{C}^2}
\end{aligned}$$