Devoir surveillé n°6

Durée 4h

L'usage des calculatrices est interdit.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :
- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Problème A : Analyse

La Partie III est indépendante des Parties I et II.

Partie I

Soient b et c deux réels. On s'intéresse aux solutions réelles de l'équation différentielle homogène

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{H}}) : \; y'' + by' + cy = 0.$$

On suppose, dans cette question, que : $b^2 - 4c > 0$.

1. Donner les racines r_1 et r_2 du trinôme $r^2 + br + c$, et rappeler les relations coefficients-racines (qui permettent d'exprimer en fonction de b et c : $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$).
2. Montrer que toute fonction de la forme $t \mapsto e^{r_i t}, i \in \{1, 2\}$, est solution de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$.
3. Vérifier que, pour toute solution y de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$:
$$(y' - r_1 y)' - r_2(y' - r_1 y) = 0.$$
4. Montrer que, pour toute solution y de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$, il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que :
$$y'(t) - r_1 y(t) = C_2 e^{r_2 t} \qquad y'(t) - r_2 y(t) = C_1 e^{r_1 t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$
5. En déduire que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ est de la forme :
$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
6. Étude d'un cas particulier : $b = 0$, $c = -16$.
   (a) Donner l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ dans ce cas particulier.
   (b) On adjoint à l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ les conditions initiales :
   $$y(0) = 2e \quad \text{et} \quad y'(0) = 0.$$
   Combien de solutions sur $\mathbb{R}$ admet alors l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$? On demande d'expliciter ces solutions.

Partie II

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \ (2x - y^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 16\varphi = 0$$

sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ y^2 < 2x\}$.

1. Représenter D. Justifier qu'il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On considère l'application h qui, à tout (u, v) de Δ, associe :

$$h(u, v) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, v\right).$$

   Justifier que h est à valeurs dans D puis, en explicitant sa réciproque, que h est une bijection de Δ sur D. Montrer que h et h^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leurs domaines de définition respectifs.
3. Montrer que la fonction φ, de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, est solution de (E) sur D si et seulement si la fonction ψ définie, pour tout (u, v) de Δ, par $\psi(u, v) = (\varphi \circ h)(u, v)$, est solution sur Δ de

$$(E') : \ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 16\psi = 0.$$

4. Déterminer toutes les solutions de (E') sur Δ puis celles de (E) sur D.

Partie III

On s'intéresse à la recherche des extrema de la fonction $f : (x, y) \longmapsto 2(x^2 + y^2) - 4xy + 2$ sur le domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ 6x^2 + 2y^2 \leq 3\}.$$

On admettra que $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ 6x^2 + 2y^2 < 3\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1. Réduire $\cos(t) - \sqrt{3}\sin(t)$ sous la forme $\alpha \cos\big(t + \beta\big)$ où α et β sont deux réels qu'on précisera.
2. Donner la nature et une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne

$$6x^2 + 2y^2 = 3.$$

3. Sur une même figure, tracer l'allure de $\mathcal{E}$ et représenter U et D. Préciser le lien entre D, U et $\mathcal{E}$.
4. Justifier que D est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
5. Prouver l'existence d'un maximum global et d'un minimum global de f sur D.
6. En utilisant la représentation paramétrique de $\mathcal{E}$, déterminer les valeurs extrêmes de f le long de $\mathcal{E}$.
7. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer l'ensemble de ses points critiques dans $\mathbb{R}^2$.
   Préciser l'ensemble des points critiques de f qui appartiennent à U.
8. Calculer la matrice Hessienne de f en ses points critiques.
   Pourquoi ne permet-elle pas de déterminer leur nature ?
9. Démontrer que, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 2$.
10. Déduire de tout ce qui précède, les extrema globaux de f sur le domaine D.

Problème B : Géométrie

L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire et de son repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ usuels.

Partie I

Pour $(a, b) \neq (0, 0)$, on considère la conique $C_{a,b}$ d'équation

$$ax^2 + 2bxy + ay^2 - 4(x + y) = 4.$$

1. Dans cette question uniquement $a = 3$ et $b = 5$.
   (a) Démontrer que la courbe $C_{3,5}$ est régulière.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $C_{3,5}$ en un point $M_0(x_0, y_0)$.
   (c) Combien de tangentes à $C_{3,5}$ passent par le point O ?
   Préciser en quels points de $C_{3,5}$ la tangente passe par O.
   (d) Étudier la conique $C_{3,5}$. On donnera en particulier :
   — une équation réduite en précisant le repère dans lequel elle est obtenue,
   — sa nature,
   — les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de son centre,
   — les coordonnées dans le repère de votre choix (à préciser) de ses sommets,
   — les équations dans le repère de votre choix (à préciser) des asymptotes (éventuelles).
   (e) Tracer la conique $C_{3,5}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra une unité de 4cm.
2. Déterminer en fonction de a et b le type de conique qu'est $C_{a,b}$.

Partie II

On considère désormais la conique $C_{A,B}$ d'équation : $Ax^2 + 2Bxy + Ay^2 - 4(x + y) = 4$ où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètres respectifs $p_A \in]0, 1[$ et $p_B \in]0, 1[$.

On définit la variable aléatoire X par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et :
— $X = 1$ si $C_{A,B}$ est du type ellipse,
— $X = 0$ si $C_{A,B}$ du type parabole,
— $X = -1$ si $C_{A,B}$ est du type hyperbole.

1. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p_A)^{k-1}(1 - p_B)^{k-1}$.
2. Justifier que $P(A + B = 0) = 0$.
3. Justifier que $P(X = 0) = P(A = B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(A = k)P(B = k)$.
4. En déduire que $P(X = 0) = \dfrac{p_A p_B}{p_A - p_A p_B + p_B}$.
5. Justifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, $P(B > k) = (1 - p_B)^k$.
6. En déduire que $P(B > A) = \dfrac{p_A(1 - p_B)}{p_A - p_A p_B + p_B}$.
7. En déduire $P(X = -1)$ puis $P(X = 1)$.
8. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.