Devoir surveillé n°6 : corrigé

Problème A : Analyse

Partie I

1. Les racines sont $\boxed{r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2} \text{ et } r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}}$.

   Les relations coefficients-racines donnent $\boxed{r_1 + r_2 = -b \text{ et } r_1 r_2 = c}$.

2. Soit $i \in \{1,2\}$ et $f_i : t \longmapsto e^{r_i t}$. La fonction f_i est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f_i''(t) + bf_i'(t) + cf_i(t) = \left(r_i^2 + br_i + c\right) e^{r_i t} = 0 \cdot e^{r_i t} = 0.$$

   Donc $\boxed{t \longmapsto e^{r_i t} \text{ est solution de } (\mathcal{E}_{\mathcal{H}}) \text{ sur } \mathbb{R}}$.

3. Soit y une solution de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$. D'après les relations coefficients-racines,

$$\left(y' - r_1 y\right)' - r_2\left(y' - r_1 y\right) = y'' - (r_1 + r_2)\, y' + r_1 r_2 y = y'' + by' + cy = 0.$$

   Donc, $\boxed{\text{pour toute solution } y \text{ de } (\mathcal{E}_{\mathcal{H}}) \text{ sur } \mathbb{R},\ (y' - r_1 y)' - r_2(y' - r_1 y) = 0}$.

4. En posant $z = y' - r_1 y$, d'après la question précédente, z est solution de l'équation linéaire d'ordre 1 homogène $z' - r_2 z = 0$. Ainsi, on a :

$$\exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - r_1 y(t) = C_2 e^{r_2 t}.$$

   On fait de même avec $y' - r_2 y$ puisqu'on a aussi bien $(y' - r_2 y)' - r_1\left(y' - r_2 y\right) = 0$.

   On en déduit que : $\boxed{\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - r_1 y(t) = C_2 e^{r_2 t} \text{ et } y'(t) - r_2 y(t) = C_1 e^{r_1 t}}$.

5. En effectuant la différence terme à terme des deux identités précédentes, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (r_2 - r_1)\, y(t) = C_2 e^{r_2 t} - C_1 e^{r_1 t}.$$

   Puisque $r_1 \neq r_2$, en posant $\lambda = \dfrac{-C_1}{r_2 - r_1}$ et $\mu = \dfrac{C_2}{r_2 - r_1}$, on a : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}}$.

   Remarque : La réciproque est également vraie car toute fonction de la forme $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ est solution de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ d'après la question 2. et puisque $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ est linéaire et homogène.

6. (a) Avec $b = 0, c = -16$ on a : $\{r_1, r_2\} = \{-4, 4\}$.

   L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ est $\boxed{\left\{t \longmapsto \lambda e^{-4t} + \mu e^{4t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

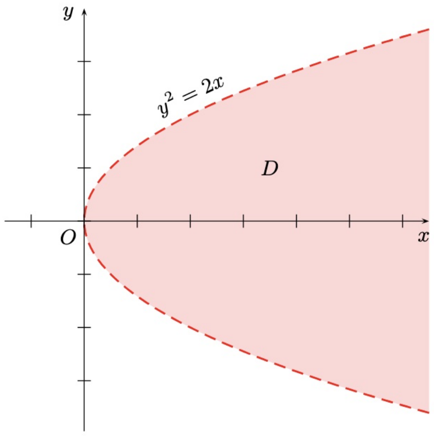
   (b) Les conditions initiales (de Cauchy) $y(0) = 2e$ et $y'(0) = 0$ donnent le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2e \\ -4\lambda + 4\mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = e,$$

   et la solution cherchée (unique) est définie par : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e\left(e^{-4t} + e^{4t}\right) = 2e\,\mathrm{ch}(4t)}$.

Partie II

1. Représentation du domaine D :



$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) < 0\}$, où $f : (x, y) \longmapsto y^2 - 2x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, car polynomiale.

D étant défini par une inégalité stricte, $\boxed{D \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2}$.

2. Si $(u, v) \in \Delta$ et $(x, y) = h(u, v)$, c'est-à-dire $x = \dfrac{u^2 + v^2}{2}$ et $y = v$, alors on a :

$$y^2 = v^2 < u^2 + v^2 = 2x,$$

car $u > 0$. Donc $\boxed{h \text{ est bien à valeurs dans } D}$.

Soit $(x, y) \in D$. Montrons qu'il admet un unique antécédent $(u, v) \in \Delta$ par h :

$$(x, y) = h(u, v) \iff \begin{cases} x = \frac{u^2+v^2}{2} \\ y = v \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 = 2x - y^2 \\ v = y \end{cases} \iff \begin{cases} u = \sqrt{2x - y^2} \\ v = y \end{cases},$$

car $u > 0$ et $2x - y^2 > 0$. Ainsi, $\boxed{h \text{ est bijective de } \Delta \text{ dans } D}$ et sa bijection réciproque est

$$\boxed{h^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \Delta \\ (x, y) & \longmapsto & \left(\sqrt{2x - y^2}, y\right) \end{array} \right.}.$$

$\boxed{h \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \Delta}$ car ses deux applications coordonnées $(u, v) \mapsto \dfrac{u^2 + v^2}{2}$ et $(u, v) \mapsto v$ sont des fonctions polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^2$.

De même pour la seconde application coordonnée de h^{-1}. La première application coordonnée $(x, y) \mapsto \sqrt{2x - y^2}$ de h^{-1} est la composée de $(x, y) \mapsto 2x - y^2$, qui est une fonction polynomiale sur D, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et de $t \mapsto \sqrt{t}$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $\boxed{h^{-1} \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } D}$.

3. φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D si et seulement si ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Δ, d'après les relations $\psi = \varphi \circ h$ et $\varphi = \psi \circ h^{-1}$ (et puisque h et h^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$).

Notons $h = (x, y)$, c'est-à-dire $x(u, v) = \dfrac{u^2 + v^2}{2}$ et $y(u, v) = v$. Pour tout $(u, v) \in \Delta$, on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)}_{=u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial x}(h(u, v)) + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)}_{=0} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(h(u, v)) = u \frac{\partial \varphi}{\partial x}(h(u, v)),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}(u,v) &= u\left(\underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)}_{=u}\times\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(h(u,v))+\underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)}_{=0}\times\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}(h(u,v))\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(h(u,v))\\ &= u^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(h(u,v))+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(h(u,v)).\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $(u,v)\in\Delta$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}(u,v)-16\psi(u,v)=0 &\iff u^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(h(u,v))+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(h(u,v))-16\varphi(h(u,v))=0\\ &\iff (2x-y^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)-16\varphi(x,y)=0,\end{aligned}$$

où on a noté $(x,y)=h(u,v)\in D$. Ainsi, $\boxed{\text{l'équivalence est démontrée}}$.

4. Soit ψ une solution de (E') sur Δ. Soit $v\in\mathbb{R}$ fixé, et $f(u)=\psi(u,v)$ pour tout $u>0$.

$$\forall u>0,\quad f''(u)-16f(u)=\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}(u,v)-16\psi(u,v)=0.$$

D'après le résultat de la question 6.(a) de la Partie I, il existe $\lambda,\mu\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\boxed{\forall(u,v)\in\Delta,\quad f(u)=\psi(u,v)=\lambda(v)e^{-4u}+\mu(v)e^{4u}}.$$

On a donc trouvé toutes les solutions de (E') sur Δ. On en déduit les solutions de (E) :

$$\boxed{\forall(x,y)\in D,\quad \varphi(x,y)=\lambda(y)e^{-4\sqrt{2x-y^2}}+\mu(y)e^{4\sqrt{2x-y^2}},\quad \text{où}\quad \lambda,\mu\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

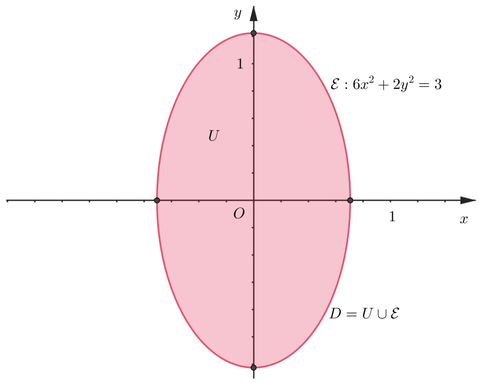
Partie III

1. $\cos(t)-\sqrt{3}\sin(t)=2\left(\frac{1}{2}\cos(t)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t)\right)\boxed{=2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)}$. On a donc $\boxed{\alpha=2\text{ et }\beta=\frac{\pi}{3}}$.

2. $6x^2+2y^2=3\iff\dfrac{x^2}{(1/\sqrt{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3/2})^2}=1$, qui est l'équation réduite d'une $\boxed{\text{ellipse}}$ de centre O, de demi-petit axe $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, de demi-grand axe $b=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et de représentation paramétrique :

$$\boxed{\mathcal{E}:\begin{cases}x(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)\\ y(t)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin(t)\end{cases},\ t\in[0,2\pi]}.$$

3. Représentation de $\mathcal{E}$, U et D : $\boxed{U\text{ est l'intérieur de }D\text{ et }\mathcal{E}\text{ son bord (ou sa frontière)}}$.



4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \leq 0\}$, où $g : (x,y) \longmapsto 6x^2 + 2y^2 - 3 \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^2)$, car polynomiale.

   D étant défini par une inégalité large, $\boxed{D \text{ est un fermé de } \mathbb{R}^2}$.

5. D est de plus borné, car inclus dans le disque fermé de centre O et de rayon $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

   Comme f est continue sur le fermé borné D, elle est bornée sur D et atteint ses bornes.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ admet un maximum global et un minimum global sur } D}$.

6. D'après la question 1. de cette partie, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin(t)\right) &= \cos^2(t) + 3\sin^2(t) - 2\sqrt{3}\cos(t)\sin(t) + 2 \\ &= \left(\cos(t) - \sqrt{3}\sin(t)\right)^2 + 2 = 4\cos^2\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + 2. \end{aligned}$$

   La fonction $\cos^2$ prend toutes les valeurs de $[0,1]$ lorsque t décrit l'intervalle $[0, 2\pi]$.

   Donc $\boxed{\text{La valeur minimale de } f \text{ sur } \mathcal{E} \text{ est 2 et la valeur maximale de } f \text{ sur } \mathcal{E} \text{ est 6}}$.

7. $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$, car polynomiale. Déterminons l'ensemble de ses points critiques :

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 4y = 0 \\ 4y - 4x = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow y = x.$$

   $\boxed{\text{L'ensemble des points critiques de } f \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ est la droite d'équation } y = x}$. De plus,

$$(y = x \text{ et } (x,y) \in U) \Longleftrightarrow \left(y = x \text{ et } x^2 < \frac{3}{8}\right).$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des points critique de } f \text{ dans } U \text{ est } \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x \text{ et } x \in \left]-\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}}\right[\right\}}.$$

8. Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4$.

$$\boxed{\text{En tout point et en particulier en un point critique, la Hessienne de } f \text{ est } H = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}}.$$

   $\boxed{\det(H) = 0 \text{ donc } H \text{ ne permet pas d'en déduire la nature des points critiques}}$.

9. Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a : $f(x,y) - 2 = 2(x^2 + y^2 - 2xy) = 2(x-y)^2 \geq 0$.

   Donc $\boxed{\text{pour tout } (x,y) \text{ de } \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geq 2}$.

10. D'après les résultats de la question 7 de cette partie, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (justification analogue à celle vue pour le fermé D, avec une inégalité stricte). Donc, si f admet un extremum local dans U alors c'est en un point critique et sa valeur est $f(x,x) = 2$. D'après le résultat de la question 9 de cette partie, cette valeur est un minimum global de f.

    Ainsi, dans U (qui est l'intérieur de D), f n'admet pas de maximum local et admet un minimum global en tout point $(x,x) \in U$. Le maximum de f sur D est donc atteint sur son bord $\mathcal{E}$.

    Donc $\boxed{\text{la valeur minimale de } f \text{ sur } D \text{ est 2 et la valeur maximale de } f \text{ sur } D \text{ est 6}}$.

Problème B : Géométrie

1. (a) L'équation cartésienne de $C_{3,5}$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $f(x, y) = 0$, avec

$$f : (x, y) \longmapsto 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 4x - 4y - 4 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2),$$

car polynomiale. Cherchons les points critiques de f :

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 10y - 4 \\ 6y + 10x - 4 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 3y + 5x = 2 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} x = y \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

$f\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right) = -5 \neq 0$ donc $C_{3,5}$ ne contient aucun point critique de f.

Donc $\boxed{\text{La courbe } C_{3,5} \text{ est régulière}}$.

(b) En un point régulier $M_0(x_0, y_0)$, la courbe $C_{3,5}$ admet une tangente $\mathcal{T}_0$ de vecteur normal $\vec{\nabla} f(M_0) = 2\begin{pmatrix} 3x_0 + 5y_0 - 2 \\ 3y_0 + 5x_0 - 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$M(x, y) \in \mathcal{T}_0 \iff \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{\nabla} f(M_0) = 0 \iff (3x_0 + 5y_0 - 2)(x - x_0) + (3y_0 + 5x_0 - 2)(y - y_0) = 0.$$

$$\boxed{\mathcal{T}_0 : \ (3x_0 + 5y_0 - 2)x + (3y_0 + 5x_0 - 2)y = (3x_0 + 5y_0 - 2)x_0 + (3y_0 + 5x_0 - 2)y_0}.$$

(c) On cherche M_0 tel que :

$$\begin{cases} M_0 \in C_{3,5} \\ O \in \mathcal{T}_0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_0^2 + 10x_0y_0 + 3y_0^2 - 4x_0 - 4y_0 = 4 \\ 3x_0^2 + 10x_0y_0 + 3y_0^2 - 2x_0 - 2y_0 = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} x_0^2 + 2x_0 - 4 = 0 \\ y_0 = -x_0 - 2 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{On trouve qu'il y a deux tangentes à } C_{3,5} \text{ passant par } O}$:

$\boxed{\text{celle en } A(-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}) \text{ et celle en } B(-1 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5})}$.

(d) La matrice de la partie quadratique de l'équation de $C_{3,5}$ est $H = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Comme H est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, H est diagonalisable en base orthonormée directe. De plus, $\chi_H(X) = X^2 - 6X - 16 = (X + 2)(X - 8)$.

Trivialement, $E_8(H) = \text{Vect}(\vec{u})$, avec $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, unitaire. $E_{-2}(H) \perp E_8(H)$ donc

$E_{-2}(H) = \text{Vect}(\vec{v})$, avec $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, unitaire et directement orthogonal à $\vec{u}$.

Ainsi, $H = PDP^T$, avec $D = \text{diag}(8, -2)$ et $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2)$.

On pose $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ (formule de changement de base).

En notant (X, Y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{u})$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$ et l'équation de $C_{3,5}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ est :

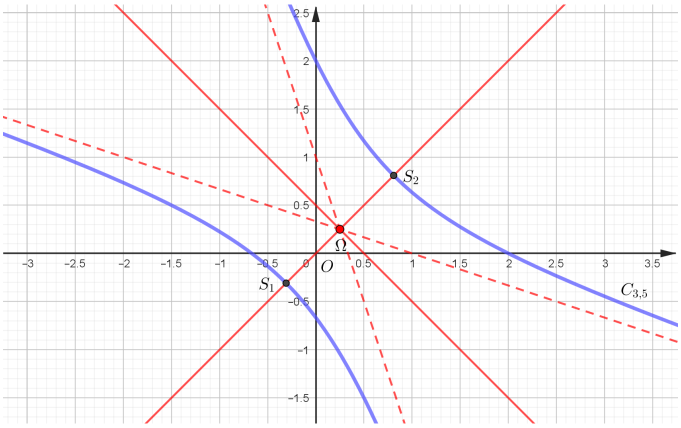
$$8X^2 - 2Y^2 - 4\sqrt{2}X = 4 \iff 8\left(X - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2Y^2 = 5 \iff \boxed{\frac{\left(X - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}{\sqrt{\frac{5}{8}}^2} - \frac{Y^2}{\sqrt{\frac{5}{2}}^2} = 1}.$$

$\boxed{C_{3,5} \text{ est une hyperbole}}$ de centre Ω de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$ dans $\mathcal{R}'$ et $\boxed{\Omega\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \text{ dans } \mathcal{R}}$.

$\boxed{\text{Les deux sommets de l'hyperbole } C_{3,5} \text{ ont pour coordonnées } \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \pm \sqrt{\frac{5}{8}}, 0\right) \text{ dans } \mathcal{R}'}$.

$\boxed{\text{Les deux asymptotes de l'hyperbole } C_{3,5} \text{ ont pour équations } Y = \pm 2\left(X - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \text{ dans } \mathcal{R}'}$.

(e) Pour le tracé, on peut construire le repère $\mathcal{R}'' = (\Omega; \vec{u}, \vec{v})$, placer les sommets de coordonnées $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{8}}, 0\right)$ dans $\mathcal{R}''$, tracer les asymptotes d'équations $\mathcal{Y} = \pm 2\mathcal{X}$ dans $\mathcal{R}''$, puis $C_{3,5}$ d'équation $\frac{\mathcal{X}^2}{\sqrt{\frac{5}{8}}^2} - \frac{\mathcal{Y}^2}{\sqrt{\frac{5}{2}}^2} = 1$ dans $\mathcal{R}''$:



2. La matrice de la partie quadratique de l'équation de $C_{a,b}$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, de déterminant $a^2 - b^2$.

On en déduit le type de la conique $C_{a,b}$, éventuellement dégénérée : - c'est une parabole si et seulement si $\lvert a\rvert = \lvert b\rvert$; - c'est une ellipse si et seulement si $\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$; - c'est une hyperbole si et seulement si $\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$.

Partie II

1. La série géométrique de raison $(1 - p_A)(1 - p_B) \in]0, 1[$ converge et a pour somme

$$\boxed{S = \frac{1}{1 - (1 - p_A)(1 - p_B)} = \frac{1}{p_A + p_B - p_A p_B}}.$$

2. Les variables A et B sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (loi géométrique), donc $(A + B = 0) = \varnothing$.

   Donc $\boxed{P(A + B = 0) = P(\varnothing) = 0}$.

3. D'après la question 2 de la Partie I, $(X=0)=(|A|=|B|)$ mais comme A et B sont positives, on a :
$$(X=0)=(A=B)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}(A=k,B=k),$$
union d'événements deux à deux incompatibles. Donc
$$P(X=0)=P(A=B)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(A=k,B=k).$$
Par indépendance de A et B, on a : $\boxed{P(X=0)=P(A=B)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(A=k)P(B=k)}$.

4. Puisque $\forall k\in\mathbb{N}^*, P(A=k)=p_A\left(1-p_A\right)^{k-1}$ et $P(B=k)=p_B\left(1-p_B\right)^{k-1}$, il reste
$$P(X=0)=\sum_{k=1}^{+\infty}p_A\left(1-p_A\right)^{k-1}p_B\left(1-p_B\right)^{k-1}=p_Ap_BS.$$
Donc $\boxed{P(X=0)=\dfrac{p_Ap_B}{p_A+p_B-p_Ap_B}}$.

5. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $(B>k)=\bigcup_{i=k+1}^{+\infty}(B=i)$, union d'événements deux à deux incompatibles. Donc
$$P(B>k)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}P(B=i)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_B\left(1-p_B\right)^{i-1}=\frac{p_B\left(1-p_B\right)^k}{1-\left(1-p_B\right)}.$$
Donc $\boxed{P(B>k)=\left(1-p_B\right)^k}$.

6. La famille $((A=k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned}P(B>A)&=\sum_{k=1}^{+\infty}P(B>A,A=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(B>k,A=k)\underset{\text{indep.}}{=}\sum_{k=1}^{+\infty}P(B>k)P(A=k)\\&\underset{II\ 5.}{=}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1-p_B\right)^k p_A\left(1-p_A\right)^{k-1}=p_A\left(1-p_B\right)S.\end{aligned}$$
Donc $\boxed{P(B>A)=\dfrac{p_A\left(1-p_B\right)}{p_A+p_B-p_Ap_B}}$.

7. D'après la question 2 de la Partie I, $(X=1)=(|A|>|B|)=(A>B)$, car A et B sont positives.

De même, $(X=-1)=(B>A)$, donc $\boxed{P(X=-1)=P(B>A)=\dfrac{p_A\left(1-p_B\right)}{p_A+p_B-p_Ap_B}}$

et $\boxed{P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=-1)=\dfrac{p_B\left(1-p_A\right)}{p_A+p_B-p_Ap_B}}$.

8. On a :
$$E(X)=(-1)\times P(X=-1)+0\times P(X=0)+1\times P(X=1)=P(X=1)-P(X=-1).$$
Donc $\boxed{E(X)=\dfrac{p_B-p_A}{p_A+p_B-p_Ap_B}}$.