Éléments de correction du DS n°5

Problème A : Algèbre

Partie 1

1. Soit r l'endomorphisme canoniquement associé à R.
$r(i) = \frac{1}{3}(1,2,2)$, $r(j) = \frac{1}{3}(2,1,-2)$, $r(k) = \frac{1}{3}(-2,2,-1)$.
On a $\langle r(i), r(j)\rangle = 0$, $\|r(i)\|^2 = \|r(j)\|^2 = 1$.
Donc $(r(i), r(j))$ est une famille orthonormée. De plus, $r(i) \wedge r(j) = \frac{1}{9}(-6,6,-3) = r(k)$
Donc $(r(i), r(j), r(k))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, $R \in O(3)$ et $\det(R) = 1$.
Donc $\boxed{r \text{ est une rotation}}$, d'axe $E_1(r) = \mathrm{Ker}(r - id)$.
$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(r - id) \iff \begin{cases} -2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}.$$
$\boxed{\text{L'axe de la rotation est la droite } \mathcal{D} \text{ orientée par } u = (1,1,0)}$.
Déterminons l'angle θ de la rotation.
R est semblable à $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$...
Donc $\mathrm{tr}(R) = 1 + 2\cos(\theta) = \frac{1}{3}$, $\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$ et $\theta = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ $[2\pi]$.
$k \perp u$ et $k \wedge r(k) = \frac{1}{3}(-2,-2,0) = -\frac{2}{3}u$, donc $\det(k, r(k), u) < 0$.
Donc $\sin(\theta) < 0$ et $\boxed{\theta = -\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \ [2\pi]}$.

2. R est une matrice orthogonale, donc $R^{-1} = R^T$.
$$\boxed{A_1 = RDR^{-1} = RDR^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} R^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A}.$$

3. (a) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Posons $P_1 = R\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}R^{-1}$. P_1 est une matrice semblable à une matrice réduite de projection, donc p_1, endomorphisme canoniquement associé à P_1, est une projection.
Posons $S_1 = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}R^{-1}$. S_1 est une matrice semblable à une matrice réduite de symétrie, donc s_1, endomorphisme canoniquement associé à S_1, est une symétrie.

$$A_1 = RDR^{-1} = R\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}R^{-1}R\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}R^{-1}$$
$$= R\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}R^{-1}R\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}R^{-1}.$$

Donc $A_1 = S_1P_1 = P_1S_1$, d'où $f_1 = s_1 \circ p_1 = p_1 \circ s_1$.

Donc $\boxed{f_1 \text{ est la composée commutative d'une symétrie } s_1 \text{ et d'une projection } p_1}$.

(b) On pouvait choisir $S_1 = R\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}R^{-1}$. $\boxed{\text{La symétrie } s_1 \text{ n'est donc pas unique}}$.

(c) $S_1^T = (R^T)^T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}R^T = S_1$.

Donc S_1 est symétrique réelle et ses sous espaces propres sont orthogonaux.

Donc $\boxed{\text{la symétrie } s_1 \text{ proposée à la question (a) est orthogonale}}$.

4. (a) $A = 3A_1 = R\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}R^{-1}$. Donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(A) = \{-3, 0, 3\}}$.

(b) $A = 3A_1 = 3I_3S_1P_1$ et $3I_3$ est la matrice de l'homothétie de rapport 3.

Donc f est la composée de l'homothétie de rapport 3, de s_1 et de p_1.

Partie 2

1. La matrice B est symétrique réelle, car ses coefficients sont réels et $B^T = B$.

   Donc $\boxed{\text{B est diagonalisable dans une base de vecteurs propres orthonormée}}$.

2. Notons $\chi_B \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme caractéristique de B. On a :

$$\det(XI_3 - B) = \begin{vmatrix} X-5/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -1/2 & -1 & X-5/2 \end{vmatrix}$$
$$\underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -1/2 \\ X-4 & X-2 & -1 \\ X-4 & -1 & X-5/2 \end{vmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -1/2 \\ 0 & X-1 & -1/2 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix}$$

Donc $\chi_B(X) = (X-4)(X-1)(X-2)$ et $\boxed{\text{les valeurs propres de } B \text{ sont 1, 2 et 4}}$.

Remarque : χ_B est scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples, ce qui prouve à nouveau que B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. De plus, on en déduit que ses espaces propres sont des droites vectorielles.

3. Déterminons $E_1 = \text{Ker}(I_3 - B)$, $E_2 = \text{Ker}(2I_3 - B)$ et $E_4 = \text{Ker}(4I_3 - B)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

• $I_3 - B = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1/2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} -3x - 2y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - 2(-x - z) - z = 0 \\ y = -x - z \\ -x - 2(-x - z) - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ y = -x - z \\ x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -2z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$E_1 = \text{Vect}(U_1)$, avec $U_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est unitaire.

• $2I_3 - B = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{cases} -x - 2y - z = 0 \\ -x - z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = 0 \\ x = -z \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$E_2 = \text{Vect}(U_2)$, avec $U_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui est unitaire et orthogonal à U_1.

• La matrice B étant symétrique réelle, $E_4 \perp E_1$ et $E_4 \perp E_2$.

$E_4 = \text{Vect}(U_3)$, avec $u_3 = u_1 \wedge u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est unitaire, orthogonal à U_1 et à U_2.

Donc $\boxed{B = P\Delta P^{-1}, \text{ avec } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ qui est orthogonale}}$.

Les coefficients diagonaux de Δ sont dans l'ordre croissant, ceux de la $1^{\text{ière}}$ ligne de P positifs.

4. Considérons la propriété H_n : « $B^n = P\Delta^n P^{-1}$ », avec $n \in \mathbb{N}$.

— Initialisation : pour $n = 0$, on a : $B^0 = I_3$ et $P\Delta^0 P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = B^0$.

Ainsi, H_0 est vraie.

— Hérédité : Supposons que $B^n = P\Delta^n P^{-1}$ à un rang $n \in \mathbb{N}$. Alors on a :

$B^{n+1} = B^n B = P\Delta^n P^{-1} P\Delta P^{-1} = P\Delta^n I_3 \Delta P^{-1} = P\Delta^n \Delta P^{-1} = P\Delta^{n+1} P^{-1}$.

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

— Conclusion : Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ B^n = P\Delta^n P^{-1}}$.

5. $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$ et P est orthogonale, donc $P^{-1} = P^T$. Ainsi,

$$\begin{aligned} B^n &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2^n\sqrt{3} & 4^n\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 4^n\sqrt{2} \\ 1 & -2^n\sqrt{3} & 4^n\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ donc} \end{aligned}$$

$$\boxed{B^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 + 3.2^n + 2^{2n+1} & -2 + 2^{2n+1} & 1 - 3.2^n + 2^{2n+1} \\ -2 + 2^{2n+1} & 4 + 2^{2n+1} & -2 + 2^{2n+1} \\ 1 - 3.2^n + 2^{2n+1} & -2 + 2^{2n+1} & 1 + 3.2^n + 2^{2n+1} \end{pmatrix}}.$$

6. Δ' est diagonale donc $\Delta'^T = \Delta'$. De plus, P' est orthogonale donc $P'^{-1} = P'^T$ et on a :

$$B'^T = \left(P'\Delta'P'^{-1}\right)^T = \left(P'\Delta'P'^T\right)^T = \left(P'^T\right)^T \Delta'^T P'^T = P'\Delta'P'^T = P'\Delta'P'^{-1} = B.$$

Finalement, $\boxed{\text{si } \Delta' \text{ est diagonale et } P' \text{ orthogonale, alors } B' = P'\Delta'P'^{-1} \text{ est symétrique}}$.

Partie 3

1. (a) Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note U, V, W les matrices colonnes des coordonnées de u, v, w dans la base $\mathscr{B}$, respectivement. Comme U^T est une ligne et BV une colonne, on a :

$\varphi(u, v) = U^T(BV) \in \mathbb{R}$ et $\varphi(u, v) = (U^T BV)^T = V^T B^T U = V^T BU = \varphi(v, u)$, car $B^T = B$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une forme symétrique}}$. De plus, on a :

$$\varphi(u, v + \lambda w) = U^T B(V + \lambda W) = U^T BV + \lambda U^T BW = \varphi(u, v) + \lambda\varphi(u, w).$$

Ainsi, φ est symétrique et linéaire à droite, donc $\boxed{\varphi \text{ est bilinéaire}}$.

(b) Soient $u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ et $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

D'après la question 3 de la Partie 2, $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et P est la matrice de passage de la base orthonormée (canonique) $\mathscr{B} = (i, j, k)$ à la base $\mathscr{B}'$.

De plus, $U' = P^T U = P^{-1}U$ et $U = PU'$. D'après la formule de changement de base,

$\boxed{U' \text{ est le vecteur colonne des coordonnées de } u \text{ dans la base } \mathscr{B}'}$.

(c) Toujours d'après la question 3 de la Partie 2, on a : $B = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^T$ et donc

$$\varphi(u, u) = U^T BU = U^T PDP^T U = \left(P^T U\right)^T DP^T U = \boxed{U'^T DU' = \varphi(u, u)}.$$

Avec $U' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on a : $\varphi(u, u) = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 2y' \\ 4z' \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{\varphi(u, u) = x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2}$.

(d) On déduit que $\varphi(u,u) \geq 0$, comme somme de réels positifs. De plus, on a :

$$\varphi(u,u) = 0 \iff x'^{\,2} + 2y'^{\,2} + 4z'^{\,2} = 0 \iff x'^{\,2} = 2y'^{\,2} = 4z'^{\,2} = 0 \iff x' = y' = z' = 0$$
$$\iff U' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff P^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff u = (0,0,0).$$

Ainsi, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^3}$.

2. (a) Soit u et v deux vecteurs propres de g associés à deux valeurs propres distinctes λ et μ, respectivement. On a :

$$g(u) = \lambda u,\ g(v) = \mu v,\ u \neq (0,0,0) \text{ et } v \neq (0,0,0).$$

Comme g est l'endomorphisme canoniquement associé à B, $BU = \lambda U$ et $BV = \mu V$. Donc

$$\varphi(u,v) = U^T BV = U^T \mu V = \mu U^T V \text{ et } \varphi(v,u) = V^T BU = V\lambda U = \lambda V^T U = \lambda U^T V,$$

par symétrie du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

φ étant également symétrique, on a : $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$.

On en déduit que $\mu U^T V = \lambda U^T V$, puis que $U^T V = 0$, car $\lambda \neq \mu$.

Finalement, $\varphi(u,v) = \mu U^T V = 0$ et $\boxed{u \text{ est orthogonal à } v \text{ pour le produit scalaire } \varphi}$.

(b) D'après la question 3 de la Partie 2, $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de vecteurs propres de g associés à trois valeurs propres distinctes de g. Donc, ces trois vecteurs propres sont deux à deux orthogonaux pour φ. De plus, on a :

$$U_1' = P^T U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } \varphi(u_1,u_1) = 1^2 + 2.0^2 + 4.0^2 = 1;$$

$$U_2' = P^T U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } \varphi(u_2,u_2) = 0^2 + 2.1^2 + 4.0^2 = 2;$$

$$U_3' = P^T U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \varphi(u_3,u_3) = 0^2 + 2.0^2 + 4.1^2 = 4.$$

Posons $v_1 = u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$, $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_2 = \dfrac{1}{2}(1,0,-1)$ et $v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{4}} u_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Ainsi, $\boxed{\mathscr{B}'' = (v_1, v_2, v_3) \text{ est une base orthonormée pour } \varphi}$.

3. On a $F_u = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, u \rangle = V^T U = 0 \right\}$ et $F_u' = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(v,u) = V^T BU = 0 \right\}$.

Soit u un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ. $g(u) = \lambda u$ donc $BU = \lambda U$ et on a :

$$v \in F_u' \iff V^T BU = 0 \iff V^T \lambda U = 0 \iff \lambda V^T U = 0 \iff V^T U = 0 \iff v \in F_u,$$

car $\lambda \in \{1,2,4\}$ n'est pas nulle. Ainsi, $\boxed{F_u = F_u'}$.

4. (a) La base $\mathscr{B} = (i, j, k)$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Donc $\boxed{F_i = \text{Vect}(j, k) \text{ et } (j, k) \text{ est une base de } F_i}$.

(b) Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$w \in F_i' \iff \varphi(w, i) = 0 \iff \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 5x + 2y + z = 0 \iff w = (x, y, -5x - 2y) = x(1, 0, -5) + y(0, 1, -2).$$

Donc $\boxed{F_i' = \text{Vect}(w_1, w_2), \text{ avec } w_1 = (1, 0, -5) \text{ et } w_2 = (0, 1, -2) \text{ non colinéaires}}$.

(c) $w_1 = i - 5k \in F_i'$ mais $w_1 \notin F_i = \text{Vect}(j, k)$. Donc $\boxed{F_i \neq F_i'}$.

F_i est le plan d'équation $x = 0$ et F_i' celui d'équation $5x + 2y + z = 0$. Donc, on a :

$$w = (x, y, z) \in F_i \cap F_i' \iff \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ 5x + 2y + z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ z = -2y \end{array} \right. \iff w = y(0, 1, -2).$$

Ainsi, $\boxed{F_i \cap F_i' = \text{Vect}(w_3), \text{ avec } w_3 = (0, 1, -2)}$.

5. (a) Pour $v \in \mathbb{R}^3$, $v \in F_u' \iff \varphi(u, v) = 0 \iff U^T B V = 0 \iff \langle u, g(v) \rangle = 0 \iff g(v) \in F_u$.

Ainsi, $\boxed{v \in F_u' \Longrightarrow g(v) \in F_u}$.

(b) Soient $v, w \in \mathbb{R}^3$. Comme $B^T = B$, on a :

$$\langle g(v), w \rangle = (BV)^T W = V^T B^T W = V^T (BW) = \langle v, g(w) \rangle,$$

Donc $\boxed{\text{pour tous } v, w \in \mathbb{R}^3,\ \langle g(v), w \rangle = \langle v, g(w) \rangle}$.

6. (a) Soit $u \in \mathbb{R}^3$ <u>non nul</u> tel que $F_u = F_u'$.

• Soit $w \in g(F_u)$. Il existe $v \in F_u$ tel que $w = g(v)$.

Comme $F_u = F_u'$, $v \in F_u'$ et, d'après la question 5(a) de cette Partie 3, $w = g(v) \in F_u$.

Ainsi, $\boxed{g(F_u) \subset F_u}$ et F_u est stable par g.

• 0 n'est pas valeur propre de g, donc $\text{Ker}(g) = \{(0, 0, 0)\}$ et g est bijectif.

Donc g induit un automorphisme de F_u et $g(F_u)$ est un s.e.v. de F_u de même dimension.

Donc $\boxed{g(F_u) = F_u}$.

(b) Donc, si $v \in F_u$, $g(v) \in F_u$ et, d'après la question 5(b) de cette Partie 3, on a :

$$\langle g(u), v \rangle = \langle u, g(v) \rangle = 0.$$

Donc, $\boxed{g(u) \text{ est orthogonal à } F_u \text{ pour le produit scalaire } \langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Or, $F_u = (\text{Vect}(u))^\perp$, donc $g(u) \in F_u^\perp$, avec $F_u^\perp = \text{Vect}(u)$.

On en déduit que $g(u)$ est de la forme $g(u) = \alpha u$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Comme u est non nul, $\boxed{u \text{ est bien un vecteur propre de } g}$.

Problème B : Probabilités

Partie 1

1. T renvoie le rang du premier succès lors de la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, donc $\boxed{T \sim \mathcal{G}(p)}$.

   Ainsi, $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(T = k) = p(1-p)^{k-1}$.

2. Soit R l'évènement « réussir au moins un panier ».

   Si R est réalisé, alors il existe un rang $k \in \mathbb{N}^*$ tel que le *k-ième* lancer est le premier réussi et, si il existe un rang $k \in \mathbb{N}^*$ tel que le *k-ième* lancer est le premier réussi, alors R est réalisé. Donc

   $$R = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (T = k) = \Omega \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(R) = 1,$$

   car $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $((T = k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.

   $\boxed{\mathrm{P}(R) = 1 \text{ donc l'évènement « réussir au moins un panier » est quasi-certain}}$.

3. (a) S_N compte le nombre de succès lors de la répétition de N épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, donc $\boxed{S_N \sim \mathcal{B}(N, p)}$.

   Ainsi, $S_N(\Omega) = [\![0, N]\!]$ et $\forall k \in [\![0, N]\!]$, $\mathrm{P}(S_N = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$.

   (b) $f(p) = p(1-p) = -p^2 + p$ est polynomiale réelle de degré deux.

   f a pour coefficient dominant $-1 < 0$ donc f admet un maximum atteint en $p_0 = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$.

   Donc $\boxed{p(1-p) \leq f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}}$. **Remarque :** on peut aussi étudier les variations de f su $[0, 1]$.

   (c) Comme $S_N \sim \mathcal{B}(N, p)$, par linéarité de l'espérance, on a : $\mathrm{E}\left(\dfrac{S_N}{N}\right) = \dfrac{1}{N}\mathrm{E}(S_N) = \dfrac{Np}{N} = p$.

   De plus, $\mathrm{V}\left(\dfrac{S_N}{N}\right) = \dfrac{1}{N^2}\mathrm{V}(S_N) = \dfrac{Np(1-p)}{N^2} = \dfrac{p(1-p)}{N}$.

   Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathrm{P}\left(\left|\dfrac{S_N}{N} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{p(1-p)}{N\varepsilon^2}$.

   Comme $p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$, $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathrm{P}\left(\left|\dfrac{S_N}{N} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4N\varepsilon^2}}$.

Partie 2

1. (a) Par le théorème de transfert, on a :

   $$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X_1 - p)}\right) = \mathrm{e}^{\lambda(0-p)}\mathrm{P}(X_1 = 0) + \mathrm{e}^{\lambda(1-p)}\mathrm{P}(X_1 = 1) = (1-p)\mathrm{e}^{\lambda(0-p)} + p\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = h(\lambda).$$

   Comme $g(\lambda) = \ln(h(\lambda))$, on a bien : $\boxed{\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X_1 - p)}\right) = \mathrm{e}^{g(\lambda)}}$.

(b) Notons que, par linéarité de la somme, $\lambda\left(S_N - Np\right) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{N} X_k - \sum_{k=1}^{N} p\right) = \sum_{k=1}^{N} \lambda(X_k - p)$.

Comme les X_k sont indépendantes et de même loi, on a :

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N - Np)}\right) = \mathrm{E}\left(\prod_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{\lambda(X_k - p)}\right) = \prod_{k=1}^{N} \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X_k - p)}\right) = \prod_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{g(\lambda)} = \mathrm{e}^{Ng(\lambda)}.$$

$g(\lambda) \leq \dfrac{\lambda^2}{2}$ donc, par croissance de l'exponentielle, on a : $\boxed{\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N - Np)}\right) \leq \mathrm{e}^{\frac{N}{2}\lambda^2}}$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$.

La fonction exponentielle étant strictement croissante et $N\lambda > 0$, par équivalence, on a :

$$\left(\frac{S_N}{N} - p \geq \varepsilon\right) = (\lambda(S_N - Np) \geq \lambda N\varepsilon) = \left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N - Np)} \geq \mathrm{e}^{\lambda N\varepsilon}\right).$$

En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\lambda(S_N - Np)} \geq 0$, on obtient :

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_N}{N} - p \geq \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N - Np)} \geq \mathrm{e}^{\lambda N\varepsilon}\right) \leq \frac{\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N - Np)}\right)}{\mathrm{e}^{\lambda N\varepsilon}} \leq \frac{\mathrm{e}^{\frac{N}{2}\lambda^2}}{\mathrm{e}^{\lambda N\varepsilon}},$$

d'après le résultat de la question précédente. D'où $\boxed{\mathrm{P}\left(\frac{S_N}{N} - p \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-N\lambda\varepsilon + \frac{N}{2}\lambda^2\right)}$.

(d) On cherche $\varepsilon > 0$ tel que :

$$-N\lambda\varepsilon + \frac{N}{2}\lambda^2 = -\frac{N}{2}\varepsilon^2 \iff \varepsilon^2 - 2\lambda\varepsilon + \lambda^2 = 0 \iff (\lambda - \varepsilon)^2 = 0 \iff \lambda = \varepsilon.$$

Cela prouve que, $\boxed{\text{pour } \lambda = \varepsilon \text{, on a bien : } \mathrm{P}\left(\frac{S_N}{N} - p \geq \varepsilon\right) \leq \mathrm{e}^{-\frac{N}{2}\varepsilon^2}}$.

(e) Si l'on veut que $\dfrac{S_N}{N}$ soit une approximation de p avec une erreur inférieure à ε, c'est à dire que l'événement $\left(\left|\dfrac{S_N}{N} - p\right| < \varepsilon\right)$ soit réalisé, cette inégalité donne une majoration de la probabilité que cela ne soit pas le cas, que l'on appelle le risque d'erreur. $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{N}{2}\varepsilon^2} = 0$, donc en prenant N assez grand, on peut rendre le risque d'erreur aussi petit que l'on veut. La méthode des grandes déviations donne un risque d'erreur plus petit que celle de la Partie 1 dès que :

$$\mathrm{e}^{-\frac{N}{2}\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2} \iff f\left(\frac{N}{2}\varepsilon^2\right) \leq \frac{1}{8}, \text{ où } f(x) = xe^{-x}.$$

Après une étude de f, graphiquement, c'est le cas si $\dfrac{N}{2}\varepsilon^2 < 0.15$ ou si $\dfrac{N}{2}\varepsilon^2 > 3.3$.