Épreuve de Mathématiques I

Problème 1 : Géométrie

1. Le tableau de variations de 2ch est connu et celui de y est immédiat. On obtient :

t	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

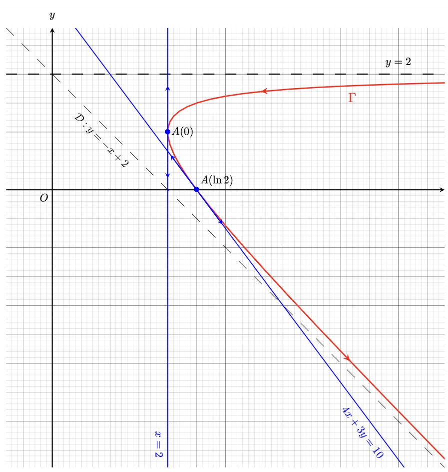
2. Au point $A(0)$, de coordonnées $(2,1)$, le vecteur dérivé est colinéaire à $\vec{j}$.
   $\boxed{\text{La tangente au point } A(0) \text{ est donc la droite verticale d'équation } x = 2}$.

3. Le point d'intersection cherché vérifie $y(t) = 0$, c'est donc le point de paramètre $\ln(2)$.
   Il a pour coordonnées $\boxed{\left(\frac{5}{2}, 0\right)}$.
   Le vecteur dérivé en ce point a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$, colinéaire au vecteur de coordonnées $(-3,4)$.
   $\boxed{(-3,4) \text{ est un vecteur directeur de la tangente au point de paramètre } \ln(2)}$.
   Soit (T) la tangente en ce point.
   $M(x,y) \in (T) \iff \begin{vmatrix} x - \frac{5}{2} & -3 \\ y & 4 \end{vmatrix} = 0 \iff 4x + 3y = 10$.
   $\boxed{\text{Une équation cartésienne de la tangente à } \Gamma \text{ en ce point est } 4x + 3y = 10}$.

4. $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = 2$.
   $\boxed{\text{La branche infinie au voisinage de } -\infty \text{ est une asymptote horizontale d'équation } y = 2}$.

5. $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) + x(t) = 2 + \mathrm{e}^{-t}$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) + x(t) - 2 = 0$, ce qui signifie qu'au voisinage de $+\infty$,
   $\boxed{\Gamma \text{ admet une asymptote oblique } \mathcal{D} \text{ d'équation } y = -x + 2}$.
   $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) + x(t) - 2 = \mathrm{e}^{-t} > 0$, donc $\boxed{\Gamma \text{ est au-dessus de } \mathcal{D}}$.

6. Courbe :



7. On note $B(t)$ le point de $\mathcal{D}$ ayant la même abscisse que $A(t)$ où $A(t)$ est le point de Γ de paramètre t.

(a) $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ d(t) = A(t)B(t) = |y(t) + x(t) - 2| = e^{-t}}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(n) = e^{-n}$.

$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} d(n) \text{ est une série géométrique de raison } e^{-1} \in]0,1[. \text{ Elle est donc convergente}}$.

Sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} d(n)$ vaut $\boxed{\dfrac{e}{e-1}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $d(\ln(n)) = \dfrac{1}{n}$. $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} d(\ln(n)) \text{ est une série de Riemann divergente}}$.

(c) Notons Γ^+la portion de Γ correspondant à $t \geqslant 0$.

• Première méthode : pour tout $x \geqslant 2$, soit $y(x)$ l'ordonnée du point de Γ^+d'abscisse x. Les coordonnées du point $A(t)$ sont $x = e^t + e^{-t}$ et $y = 2 - e^t$, et on tire e^t en fonction de x de la première équation : $e^{2t} - xe^t + 1 = 0$ donc $e^t = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ et enfin $y = 2 - e^t$ donc $y(x) = 2 - \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$.
L'aire du domaine S, si elle est finie, est égale à la limite lorsque $X \to +\infty$ suivante :

$$\lim_{X\to+\infty}\left(\int_2^X y(x)dx - \int_2^X (-x+2)dx\right) = \lim_{X\to+\infty}\int_2^X (y(x)+x-2)dx = \int_2^{+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}dx$$

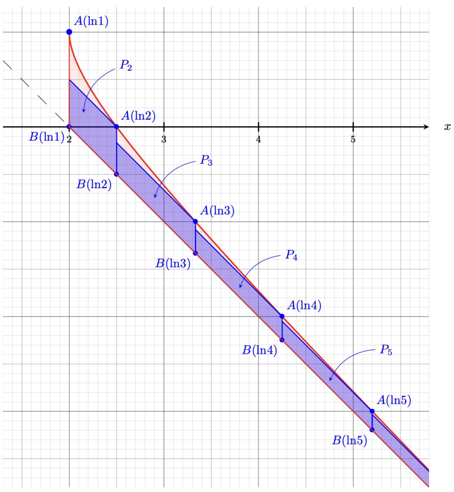
Or cette dernière intégrale est divergente (donc S n'est pas d'aire finie). On peut le voir en utilisant l'équivalent

$$\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2} = \frac{2}{x+\sqrt{x^2-4}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{et la divergence de } \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x}$$

• Deuxième méthode : pour tout $n \geqslant 2$, on considère le parallélogramme P_n construit à partir des points $A(\ln n), B(\ln n)$ et $B(\ln(n-1))$, comme sur la figure ci-dessous. On minore l'aire de S par la somme des aires des parallélogrammes P_n. L'aire de P_n vaut $d(\ln n) * (x(\ln n) - x(\ln(n-1))$ où $d(\ln n) = \dfrac{1}{n}$ et $x(\ln n) - x(\ln(n-1)) = n + \dfrac{1}{n} - \left(n - 1 + \dfrac{1}{n-1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n(n-1)}$.

L'aire de P_n est donc $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2(n-1)}$.

La somme des aires des parallélogrammes est infinie, car $\sum_{n\geqslant 2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2(n-1)}\right)$ est divergente (somme d'une série divergente et d'une série convergente). On en déduit que l'aire S est elle-même infinie.



$\boxed{\text{La partie } S \text{ n'est donc pas d'aire finie}}$.

Problème 2 : Analyse

Partie A : la fonction dilogarithme

I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

1. Soit $t > 0$, $e^t > 1$ et donc pour tout $x \leq 1$, $-x \geq -1$ et donc $e^t - x > 0$
   Ainsi $\boxed{f \text{ est bien définie sur }]0, +\infty[\times] - \infty, 1]}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. • $t \longmapsto f(t, 1)$ est continue (et positive) sur $]0, +\infty[$.
   • En $+\infty$, $f(t, 1) \sim te^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$.
   • En 0, $e^t = 1 + t + o(t)$ donc $f(t, 1) \sim 1$ et f peut donc se prolonger par continuité en 0.
   Ainsi $\boxed{t \longmapsto f(t, 1) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[}$.

3. Soit $x \in] - \infty, 1]$:
   $x \leq 1$, donc $-x \geq -1$, donc $e^t - x \geq e^t - 1 > 0$, il suffit d'inverser puis de multiplier par $t > 0$ pour obtenir, $0 < f(t, x) \leq f(t, 1)$.
   Et comme $t \longmapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, par comparaison de fonctions positives, on en déduit que $\boxed{t \longmapsto f(t, x) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[}$.

4. Appliquons le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre à $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t, x)\mathrm{d}t$
   Vérifions ses hypothèses :
   • Pour tout $x \in] - \infty, 1]$, $t \longmapsto f(t, x)$ est continue sur $]0, +\infty[$
   • Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \longmapsto f(t, x)$ est continue sur $] - \infty, 1]$
   • Pour tout $x \in] - \infty, 1]$, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $0 < f(t, x) \leq f(t, 1) = \phi(t)$
   Et ϕ est continue positive intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 2.
   Ainsi $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t, x)\mathrm{d}t$ est continue sur $] - \infty, 1]$.
   Puis $\boxed{L \text{ est continue sur }] - \infty, 1]}$ par simple produit de fonctions continues.

II - Développement en série entière

5. Ici x et n sont fixés. On peut sortir le x^n de l'intégrale par simple linéarité et n'étudier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t$
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t$ converge.
   • $t \longmapsto te^{-(n+1)t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   • En $+\infty$, comme $n + 1 > 0$, par croissance comparée, $te^{-(n+1)t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge}}$ puisque x^n ne dépend pas de t.
   On effectue ensuite une intégration par parties.
   Posons $u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = e^{-(n+1)t}$, $v(t) = -\dfrac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
   Étudions le crochet : $u(0)v(0) = 0$ et en $+\infty$, $u(t)v(t) \longrightarrow 0$, toujours par croissance comparée.
   Ainsi, on peut conclure à l'égalité des deux intégrales convergentes :
   $$\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}.$$
   Toujours en multipliant par la constante x^n, on a bien : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}}$.

6. Soit $t \in]0, +\infty[$ et $x \in [-1, 1]$.
La suite $(te^{-(n+1)t}x^n)_n$ est géométrique de raison $q = e^{-t}x$ et de premier terme te^{-t}. Comme $|q| \in [0, 1[$, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 0} te^{-(n+1)t}x^n \text{ converge}}$ et a pour somme $\dfrac{te^{-t}}{1 - xe^{-t}} = f(t, x)$ (en multipliant numérateur et dénominateur par e^t). On a donc :

$$\boxed{\forall t \in]0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t, x).}$$

7. Soit $x \in [-1, 1]$. $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.
Ainsi $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge absolument et donc par théorème de la convergence absolue elle converge.
Appliquons ensuite le théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} xs_n(t)$, à x fixé.
Vérifions ses hypothèses :
   - $\forall t \in]0, +\infty[$, $xf(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} xs_n(t)$ et $t \longmapsto xf(t, x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $t \longmapsto xs_n(t)$ intégrable sur $]0, +\infty[$, d'après la question 5.
   - Comme x^n ne dépend pas de t, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |xs_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{|x|^{n+1}}{(n + 1)^2}$ d'après la question 5.

   Et par le début de la question 7, $\sum_{n\geq 0} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n + 1)^2}$ converge (par simple changement d'indice).
   Ainsi, $\displaystyle L(x) = \int_0^{+\infty} xf(t, x)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} xs_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n + 1)^2}$ et $\boxed{L(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}}$.

8. Soit $x \in [-1, 1]$, on a $-x \in [-1, 1]$, on somme alors deux séries convergentes,
$\displaystyle L(x) + L(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1 + (-1)^n)}{n^2}$
Si n est impair $1 + (-1)^n = 0$. Si n est pair, $1 + (-1)^n = 2$.

   Ainsi $\boxed{L(x) + L(-x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}2}{(2p)^2} = \frac{1}{2}L\left(x^2\right)}$.

9. $\boxed{L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}}$ par le résultat donné en tout début d'énoncé.

   Et d'après la question 8, appliquée à $x = 1$, $\boxed{L(-1) = -\dfrac{1}{2}L(1) = -\dfrac{\pi^2}{12}}$.

III - Une autre propriété

10. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ vaut 1 d'après le cours.
Par le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, sa somme est C^∞ sur $] - 1, 1[$.
D'après la question 7, L est une fonction qui coïncide avec cette somme sur $[-1, 1]$, donc à fortiori sur $] - 1, 1[$. Ainsi L est dérivable sur $] - 1, 1[$ (elle y est même C^∞).

De plus, $\forall x \in]-1,1[$, $L'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.

Il suffit alors de bien distinguer $x = 0$ qui donne $L'(0) = 1$, et pour $x \neq 0$ en sortant $\dfrac{1}{x}$ de la somme on a le DSE usuel de $-\ln(1-x)$. Ainsi L est dérivable sur] - 1,1 [et on a :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}}$$

11. Sur $]0,1[$, h est dérivable par opérations sur les fonctions dérivables.
Il suffit alors de dériver h et d'utiliser l'expression de L' de la question 10. pour obtenir $h'(x) = 0$.
$]0,1[$ est un intervalle, ainsi $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est constante sur }]0,1[}$.

12. Notons C la valeur constante de h sur $]0,1[$.
Passons à la limite dans l'expression définissant h, quand $x \longrightarrow 0^+$.
Nous utilisons ici que L est continue sur $[0,1]$, résultat obtenu à la question 4.
Donc quand $x \longrightarrow 0^+$, $L(x) \longrightarrow L(0) = 0$, $L(1-x) \longrightarrow L(1)$, et $\ln(x)\ln(1-x) \sim -x\ln(x) \longrightarrow 0$.
On en déduit que $C = L(1)$ et donc $\boxed{h(x) = L(1) \text{ pour tout } x \in]0,1[}$.
En prenant $x = \dfrac{1}{2} \in]0,1[$, il vient $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2L\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln(2)^2 = L(1)$
ce qui donne $L\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{\ln(2)^2}{2}$.
Et enfin, par définition intégrale de L, $L\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.
Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln(2)^2}{2}}$.

Partie B : équivalent de Stirling

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f_x : t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   - Au voisinage de 0, $f_x(t) \sim t^{x-1}$ donc, d'après les intégrales de Riemann et les théorèmes de comparaison sur les fonctions positives, f_x est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1 - x < 1$, soit $x > 0$.
   - Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) = o(1/t^2)$ par croissances comparées et, pour des raisons analogues, f_x est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.
   - Finalement f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$.

   Comme f_x est positive,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \text{ converge si et seulement si } x > 0.}$$

2. Soient $x > 0$, $u : t \longmapsto t^x$ et $v : t \longmapsto -e^{-t}$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et uv possède des limites finies (et nulles) en 0 et en $+\infty$. Donc par intégration par parties, $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u\,v'$ et $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u'\,v$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_{]0,+\infty[} u\,v' = \Big[uv\Big]_0^{+\infty} - \int_{]0,+\infty[} u'\,v.$$

Or dans $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u\, v'$, on reconnait $\Gamma(x+1)$ qui est donc une intégrale convergente, et on a alors :

$$\Gamma(x+1) = \Big[-t^x e^{-t}\Big]_0^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x).$$

$$\boxed{\text{Ainsi} \quad \forall\, x>0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Un calcul direct donne :

$$\Gamma(1) = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1.$$

La formule précédente donne alors par récurrence immédiate (qu'il vaut mieux rédiger le jour du concours) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!}$$

3. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.
   On a : $u_0 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+1}{2}\, u_n = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)} u_n$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+2)(2k+1)}{4(k+1)}\right)\, u_0 = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\, u_0$$

   ce qui est également vrai pour $n=0$.
   Or, le changement de variable $t=\varphi(u)=u^2$ où φ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ donne :

$$u_0 = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}.$$

   On en déduit

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!}\sqrt{\pi}.}$$

4. La fonction ln est continue sur $[1/2,+\infty[$ donc les ρ_k sont bien définis pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.
   Soit $n\geq 2$. La relation de Chasles et les propriétés du logarithme fournissent :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) - \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt = \ln(n-1)! - \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt.$$

   La convention citée par l'énoncé dit que ce résultat reste valable pour $n=1$; donc d'après la question 2 :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \quad \ln\Gamma(n) = \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt + \sum_{k=1}^{n-1}\rho_k.}$$

5. Fixons k dans $\mathbb{N}^*$. Le changement de variable $u=t-k$ (de classe $\mathcal{C}^1$) fournit :

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln t\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} \ln(u+k)\, du = \int_{-1/2}^{0} \ln(u+k)\, du + \int_0^{1/2} \ln(u+k)\, du.$$

   Puis en posant $w=-u$, on a $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \ln(u+k)\, du = \int_0^{1/2} \ln(k-w)\, dw$. Finalement :

$$\begin{aligned}
\rho_k &= \ln k - \int_0^{1/2} \ln(t+k)\, dt - \int_0^{1/2} \ln(k-t)\, dt \\
&= \int_0^{1/2} \left(2\ln k - \ln(t+k) - \ln(k-t)\right)\, dt \\
&= \int_0^{1/2} \ln\left(\frac{k^2}{(k+t)(k-t)}\right)\, dt = \int_0^{1/2} -\ln\left(\frac{k^2-t^2}{k^2}\right)\, dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{et } \rho_k = \int_0^{1/2} -\ln\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right)\, dt.}$$

6. Par croissance de la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$ et croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq \rho_k \leq \int_0^{1/2} -\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)\, dt = -\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) \quad \sim \frac{1}{8k^2}.$$

Les théorèmes de comparaison sur les séries à termes de signe constant permettent de conclure que $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 1} \rho_k \text{ converge.}}$

7. La fonction ln admet pour primitive $t \longmapsto t\ln t - t$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt = [t\ln t - t]_{1/2}^{n-1/2} &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(n-\frac{1}{2}\right) - n + \frac{\ln 2}{2} + 1 \\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) - n + \frac{\ln 2}{2} + 1.\end{aligned}$$

Or $\quad \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2n} \quad$ donc $\quad \lim_{n\to+\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{2}. \quad$ Donc :

$$\int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt = \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} + o(1).$$

D'après la question 6, il existe un réel ℓ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = \ell + o(1)$ donc, d'après la question 4 :

$$\boxed{\exists\, c \in \mathbb{R} \;/\; \ln\Gamma(n) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + o(1).}$$

On en déduit que

$$\Gamma(n) = \exp\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + o(1)\right) = n^{n-\frac{1}{2}}\; e^{-n}\; e^c\; e^{o(1)}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{o(1)} = 1, \quad$ on obtient bien :

$$\boxed{\Gamma(n) \underset{+\infty}{\sim} e^c\; n^{n-\frac{1}{2}}\; e^{-n}.}$$

8. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\, dt.$

En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{t}{n}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,n]$, on obtient :

$$\boxed{\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}\,(1-u)^n\, du.}$$

9. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion $\mathcal{H}_n$ suivante : $\boxed{\forall\, x > 0, \quad \Gamma_n(x) = \dfrac{n^x\; n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.}$

- Initialisation :

$$\forall\, x>0,\quad \Gamma_1(x)=\int_0^1 u^{x-1}\,(1-u)\ du=\left[\frac{u^x}{x}-\frac{u^{x+1}}{x+1}\right]_{x\to 0}^{1}=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1^x\ 1!}{x(x+1)}.$$

Cela prouve que $\mathcal{H}_1$ est vraie.

- Hérédité : supposons $\mathcal{H}_n$ vraie à un rang fixé n et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Prenons $x>0$. On a $\Gamma_{n+1}(x)=(n+1)^x\displaystyle\int_0^1 u^{x-1}\,(1-u)^{n+1}\ du$.

On procède à une intégration par parties à l'aide de

$$\forall x\in]0,1],\quad \alpha(u)=(1-u)^{n+1},\quad \alpha'(u)=-(n+1)(1-u)^n,\quad \beta'(u)=u^{x-1},\quad \beta(u)=\frac{u^x}{x}.$$

Comme $\quad x>0,\quad \lim\limits_{u\to 0}\alpha(u)\beta(u)=0\quad$ et $\quad \alpha(1)\beta(1)=0,\quad$ on a :

$$\begin{aligned}\Gamma_{n+1}(x)&=(n+1)^x\int_0^1(n+1)(1-u)^n\frac{u^x}{x}\ du=\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\ \frac{\Gamma_n(x+1)}{n^{x+1}}\\ &\underset{\mathcal{H}_n}{=}\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\ \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+1+n)}\\ &=\frac{(n+1)^x\ (n+1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

On a bien montré le résultat par récurrence simple.

10. (a) $\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{2n}=e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}=e^{2n\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{2n}\right)\right)}=e^{1+o(1)}\longrightarrow e.$

On a donc finalement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{2n}=e}$.

(b) Fixons $x>0$. Une récurrence utilisant le résultat de la question 2 montre que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x\Gamma(x)$$

Donc

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\ n^x}=\frac{x(x+1)\dots(x+n)\Gamma(x)}{(x+n)\ (n-1)!\ n^x}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x(x+1)\dots(x+n)\Gamma(x)}{n!\ n^x}$$

On déduit alors du résultat admis dans l'énoncé que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\ n^x}=1\quad\text{soit}\quad\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\ n^x}\underset{n\to+\infty}{\sim}1.}$$

(c) Avec $x=\dfrac{1}{2}$, on obtient $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right)\sim\Gamma(n)\ \sqrt{n}$.

Puis la question 3 fournit $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}\sim\Gamma(n)\ \sqrt{n}$.

Mais d'après la question 2, $(2n)!=\Gamma(2n+1)$ et $n!=n\Gamma(n)$. Donc $\Gamma(2n+1)\sqrt{\pi}\sim n\,\Gamma^2(n)\sqrt{n}\,2^{2n}$.

On utilise ensuite la question 7 sur $\Gamma(2n+1)$ et $\Gamma^2(n)$ et on arrive à

$$e^c\sim\frac{(2n+1)^{2n}\sqrt{2}\,e^{-1}\sqrt{\pi}}{(2n)^{2n}}\sim\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}e^{-1}\sqrt{2\pi}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{2n}=e\quad$ donc

$$\boxed{e^c=\sqrt{2\pi}.}$$