Exercice 1 : *Algèbre linéaire*

1. (a) La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle pour $n \geq 2$. Ici, 1, j et j^2 sont les racines cubiques de l'unité et $\boxed{1+j+j^2=0}$.

   (b) Le calcul des puissances de J se fait facilement matriciellement. On a :

$$\boxed{J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad J^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}.$$

   Soit $k \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de k par 3 s'écrit $k = 3q + r$ avec $r \in \{0, 1, 2\}$, d'où

$$J^k = J^{3q+r} = (J^3)^q J^r = I_3 J^r = J^r.$$

   On a donc :

$$\boxed{J^k = J^r}$$

   (c) En ajoutant à la première colonne les deux autres, il vient :

$$\chi_J(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\-1&0&\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&\lambda&-1\\1&0&\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&\lambda+1&-1\\0&1&\lambda\end{vmatrix} = \boxed{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)}.$$

   On a donc : $\boxed{\mathrm{Sp}(J) = \{1, j, j^2 = \overline{j}\}}$.

   Par ailleurs, χ_J est scindé à racines simples donc $\underline{J \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$ (et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles).

   (d) On détermine les sous-espaces propres de J. On constate en résolvant les systèmes $JX = X$ et $JX = jX$ (ou directement) que

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}j\\j^2\\1\end{pmatrix} = j\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}.$$

   On a donc $\boxed{E_1(J) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) \text{ et } E_j(J) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix})}$.

   On obtient le troisième vecteur propre par conjugaison : si $JX = jX$, alors $\overline{JX} = \overline{jX}$, soit, comme J est réelle, $J\overline{X} = \overline{j}\overline{X} = j^2\overline{X}$. On a donc $\boxed{E_{\overline{j}}(J) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix})}$ et $\boxed{P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}}$.

   On peut alors écrire

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}^{-1}.$$

   (e) Le calcul conduit à $P\overline{P} = 3I_3$, d'où $\boxed{P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}}$.

(f) On peut décomposer $\boxed{A(a,b,c) = aI_3 + bJ + cJ^2}$. Soit P la matrice de la question ci-dessus. On a alors

$$\begin{aligned} P^{-1}A(a,b,c)P &= P^{-1}\Big(aI_3 + bJ + cJ^2\Big)P = aP^{-1}I_3P + bP^{-1}JP + cP^{-1}J^2P \\ &= aI_3 + bP^{-1}JP + c\Big(P^{-1}JP\Big)^2 = aI_3 + b\mathrm{diag}(1,j,j^2) + c\mathrm{diag}(1,j^2,j) \\ &= \mathrm{diag}(a+b+c, a+jb+j^2c, a+bj^2+cj), \end{aligned}$$

ce qui montre que la base de diagonalisation de J obtenue à la question d. (et, en fait, toute base de diagonalisation de J) est aussi base de diagonalisation de toutes les matrices $A(a,b,c)$, et est donc indépendante de a, b et c. De plus,

$$\boxed{Sp\Big(A(a,b,c)\Big) = \Big\{a+b+c, a+jb+j^2c, a+j^2b+jc\Big\}}.$$

2. (a) On a : $\boxed{U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

(b) On peut procéder matriciellement, mais cela se fait aussi directement :

$$\begin{aligned} u(x_\omega) &= u\left(\sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1}e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1}u(e_k) = e_n + \sum_{k=2}^{n} \omega^{k-1}e_{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \omega^{k-1}e_{k-1} = \omega \sum_{j=1}^{n} \omega^{j-1}e_j = \boxed{\omega x_\omega}. \end{aligned}$$

(c) La question précédente montre que toutes les racines n-ièmes de l'unité sont valeurs propres de u. Cela donne n valeurs propres. Comme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et que $\dim\mathbb{C}^n = n$, on en déduit que ces n valeurs propres sont de multiplicité 1, et que $E_\omega(u) = \mathrm{Vect}(x_\omega)$, les x_ω formant une base de $\mathbb{C}^n$. u est donc diagonalisable.

(d) Comme U est semblable à une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont des racines n-ièmes de l'unité, on a $D^n = I_n$, donc U^n est semblable à I_n, donc $U^n = I_n$.

Ainsi, on a : $\boxed{u^n = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}}$.

Exercice 2 : *Probabilités*

1. On commence par retrouver la loi marginale de X (et de Y qui suit la même loi que X). La famille $(Y = \ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{k+\ell}} = \frac{\alpha}{2^{k-1}}$$

Ensuite, encore d'après la formule des probabilités totales,

$$1 = P(\Omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{k-1}} = 4\alpha$$

On en déduit que

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{2^{k+1}}}$$

2. Pour tout couple d'entiers naturels (k,ℓ), on a
$$P(X=k)\times P(Y=\ell)=\frac{1}{2^{k+1}}\times\frac{1}{2^{\ell+1}}=\frac{1}{2^{k+\ell+2}}=\mathbb{P}(X=k,Y=\ell)$$
donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$.

3. On a $(X\geqslant n)=\displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty}(X=k)$, et comme ces événements sont deux à deux incompatibles,
$$\mathbb{P}(X\geqslant n)=\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\boxed{\frac{1}{2^n}}$$

4. On a $(X=Y)=\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X=n,Y=n)$ et par incompatibilité des événements, et indépendance de X et Y, on obtient
$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)\times\mathbb{P}(Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n+2}}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\boxed{\frac{1}{3}}$$
Pour déterminer $\mathbb{P}(X<Y)$, on peut faire un calcul analogue au précédent, basé sur l'écriture $(X<Y)=\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X=n,Y\geqslant n+1)$.
On peut aussi admettre que $\mathbb{P}(X<Y)=\mathbb{P}(X>Y)$ car X et Y sont indépendantes et de même loi. Alors,
$$1=\mathbb{P}(X<Y)+\mathbb{P}(X=Y)+\mathbb{P}(X>Y)=2\mathbb{P}(X<Y)+\frac{1}{3}\quad\text{donc}\quad\boxed{\mathbb{P}(X<Y)=\frac{1}{3}}$$

5. On a $Z(\Omega)=\mathbb{N}$ et pour tout $n\in\mathbb{N},(Z\geqslant n)=(X\geqslant n)\cap(Y\geqslant n)$. Comme X et Y sont indépendantes, il vient
$$\mathbb{P}(Z\geqslant n)=\mathbb{P}(X\geqslant n)\times\mathbb{P}(Y\geqslant n)=\frac{1}{2^{2n}}$$
Enfin, on écrit $(Z\geqslant n)=(Z=n)\cup(Z\geqslant n+1)$, réunion de deux événements incompatibles, donc
$$\mathbb{P}(Z=n)=\mathbb{P}(Z\geqslant n)-\mathbb{P}(Z\geqslant n+1)=\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n+2}}=\frac{3}{2^{2n+2}}$$
Finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{\mathbb{P}(Z=n)=\frac{3}{2^{2n+2}}}$.

6. On a $(Z,T)(\Omega)\subset\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ par définition. Ensuite, pour tout couple $(n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, on a
$$(Z=n,T=t)=\begin{cases}(X=n+t,Y=n) & \text{si } t\geqslant 0\\ (X=n,Y=n-t) & \text{si } t\leqslant 0\end{cases}$$
Comme $(X,Y)(\Omega)=\mathbb{N}^2$, on en déduit que $(Z,T)(\Omega)=\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$. Puis,
$$\forall(n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z},\quad\mathbb{P}(Z=n,T=t)=\begin{cases}\mathbb{P}(X=n+t,Y=n)=1/2^{2n+t+2} & \text{si } t\geqslant 0\\ \mathbb{P}(X=n,Y=n-t)=1/2^{2n-t+2} & \text{si } t\leqslant 0\end{cases}=\frac{1}{2^{2n+|t|+2}}$$

On en déduit la loi de T : pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(T=t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=n, T=t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n+|t|+2}} = \frac{1}{2^{|t|+2}} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3\cdot 2^{|t|}}$$

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\mathbb{P}(T=t) = \dfrac{1}{3\cdot 2^{|t|}}}$. Il s'ensuit que

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(Z=n)\times\mathbb{P}(T=t) = \frac{3}{2^{2n+2}} \times \frac{1}{3\cdot 2^{|t|}} = \frac{1}{2^{2n+|t|+2}} = \mathbb{P}(Z=n, T=t),$$

donc $\boxed{Z \text{ et } T \text{ sont indépendantes}}$.

7. k étant un entier fixé dans $\mathbb{N}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(X=k, Z=n) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } n>k \\ (X=k, Y \geqslant k) & \text{si } n=k \\ (X=k, Y=n) & \text{si } n<k \end{cases}$$

On en déduit, par indépendance de X et Y, que

$$\mathbb{P}(X=k, Z=n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n>k, \\ 1/2^{2k+1} & \text{si } n=k, \\ 1/2^{n+k+2} & \text{si } n<k \end{cases}$$

On a donc

$$\boxed{\mathrm{P}_{(X=k)}(Z=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k, Z=n)}{\mathbb{P}(X=k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n>k \\ 1/2^{k} & \text{si } n=k \\ 1/2^{n+1} & \text{si } n<k \end{cases}}.$$

Problème : *Analyse*

Partie I

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t$ d'où $\boxed{u_0 = \dfrac{\pi}{2}}$ et $u_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}$, d'où $\boxed{u_1 = 1}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(\cos t - 1)\mathrm{d}t$.
   Comme $t \longmapsto \cos^n(t)(\cos t - 1)$ est négative sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, par positivité de l'intégrale, les bornes étant ordonnées, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et $\boxed{\text{la suite } (u_n)_n \text{ est donc décroissante}}$.
   De plus, si l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle, alors la fonction est nulle sur l'intervalle d'intégration. Comme $\cos^n(t)$ est strictement positif sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$, $\boxed{u_n \text{ est strictement positif}}$.

3. $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t$.
   On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \cos^n(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$,
   $u'(t) = -n\sin t \cos^{n-1}(t)$ et $v(t) = \sin t$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ et on a :

$$u_{n+1} = \Big[\sin t \cos^n t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{n-1} t\mathrm{d}t.$$

Le crochet est nul et en écrivant $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, il vient $u_{n+1} = n(u_{n-1} - u_{n+1})$, pour tout $n \geq 1$.

On a alors :

$$\boxed{\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{n}{n+1} u_{n-1}}.$$

4. Par décroissance de la suite (u_n), $u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1}$, pour $n \geq 1$, et d'après la question précédente, $\frac{n}{n+1} u_{n-1} \leq u_n \leq u_{n-1}$, d'où par encadrement, $u_n \sim u_{n-1}$, autrement dit $\boxed{u_n \sim u_{n+1}}$.

5. La relation de la question 3 donne pour $n \geq 1$, $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ et en multipliant cette égalité par u_n, il vient pour $n \geq 1$, $(n+1)u_{n+1}u_n = nu_n u_{n-1}$.

   $\boxed{\text{La suite } ((n+1)u_{n+1}u_n) \text{ est donc constante égale à son premier terme } u_1 u_0 = \frac{\pi}{2}}$.

6. On a alors $(n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$ et comme $u_{n+1} \sim u_n$ d'après la question 4, on obtient $u_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$, et par positivité de la suite (u_n) (obtenue à la question 2) :

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

7. On a alors $RC(\sum u_n x^n) = RC(\sum \sqrt{\frac{\pi}{2n}} x^n) = RC(\sum n^{-1/2} x^n) = 1$, d'où d'après le cours :

$$\boxed{RC(\sum u_n x^n) = 1}$$

.

Partie II

1. Pour $x \in]-1,1[$, $|x \cos t| < 1$, pour tout t, et $t \longmapsto \frac{1}{1 - x\cos t}$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   $\boxed{F \text{ est donc bien définie sur }]-1,1[}$.
   $\boxed{F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$.

2. On applique le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales dépendant d'un paramètre.
   Soit $f : (x,t) \longmapsto \frac{1}{1 - x\cos t}$.
   - $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x \longmapsto \frac{1}{1 - x\cos t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$. On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\cos t}{(1 - x\cos t)^2}$
   - $\forall x \in [-a, a]$, $t \longmapsto \frac{1}{1 - x\cos t}$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, d'après la question 1 (intégrale d'une fonction continue sur un segment)
   - $\forall x \in [-a, a]$, $t \longmapsto \frac{\cos t}{(1 - x\cos t)^2}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
   - $\forall x \in [-a, a]$, $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\left|\frac{\cos t}{(1 - x\cos t)^2}\right| \leq \frac{1}{(1 - a\cos t)^2} = \varphi(t)$, où φ est intégrale sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car continue sur ce segment.

   $\boxed{\text{La fonction } F \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [-a, a]}$.

3. F étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$ pour tout $a\in]0,1[$, elle l'est sur $\bigcup\limits_{a\in l0,1[}[-a,a]=]-1,1[$, et on a :

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\quad F'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{(1-x\cos t)^2}\mathrm{d}t}$$

4. Pour $x\in\,]-1,1[$ et $t\in\mathbb{R}$, $|x\cos t|<1$. On a donc : $\dfrac{1}{1-x\cos t}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n\cos^n t$,

   d'où $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-x\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\cos^n t\mathrm{d}t$.

   On applique le théorème d'intégration terme à terme pour échanger $\sum$ et $\int$.

   - Pour $x\in\,]-1,1[$ fixé, $t\longmapsto\dfrac{1}{1-x\cos t}$ est continue sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$.
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t\longmapsto x^n\cos^n t$ est intégrable sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ car continue sur un segment.
   - $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|x^n\cos^n t\right|\mathrm{d}t=|x|^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\mathrm{d}t$ car $\cos t\geq 0$ pour $t\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$. Comme $RC(\sum u_nx^n)=1$, $\sum\left(x^n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\mathrm{d}t\right)$ converge absolument.

   On en déduit que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-x\cos t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\cos^n t\mathrm{d}t$, autrement dit :

$$\boxed{\forall x\in\,]-1,1[\,,\ F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n}$$

5. F étant développable en série entière sur]-1,1[, $\boxed{\text{elle est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur]-1,1[}}$.

Partie III

1. $a_1=y'(0)$ et en remplaçant x par 0 dans l'équation différentielle $(\mathcal{E}_R)$, il vient $\boxed{\mathrm{a}_1=1}$.

2. La fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$, et par dérivation terme à terme, on a

$$\forall x\in]-R,R[,\quad y'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

   donc

$$\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}=1$$

   donc

$$\forall x\in]-R,R[,\quad a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+1)a_{n+1}-na_{n-1}\right]x^n=1$$

   Par unicité du développement en série entière au voisinage de l'origine, on en déduit que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad (n+1)a_{n+1}-na_{n-1}=0\quad\text{donc}\quad a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_{n-1}}$$

3. En substituant $2p-1$ à n, on obtient

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad a_{2p}=\frac{2p-1}{2p}a_{2p-2}\quad\text{donc}\quad a_{2p}=\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots 2}a_0=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

De même, en substituant $2p$ à n, on trouve

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1} \quad \text{donc} \quad a_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} a_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

On a donc finalement :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \text{ et } a_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}}$$

4. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a d'après la question 4 de la partie II :
$(1-x^2)F'(x) - xF(x) = (1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^x = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n u_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1}$
$= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)u_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big((n+1)u_{n+1} - n u_{n-1}\Big)x^n + u_1.$
D'après la question 3 de la partie I, on a : $(n+1)u_{n+1} - n u_{n-1} = 0$ pour tout $n \geq 1$, et comme $u_1 = 1$, il vient :
$$\forall x \in\ ]-1,1[,\ (1-x^2)F'(x) - xF(x) = 1$$
Comme par ailleurs $F(0) = \frac{\pi}{2}$, $\boxed{F \text{ est bien solution du problème de Cauchy } (\mathcal{P}_1)}$.

5. Sur l'intervalle $]-1,1[$, la solution générale de l'équation linéaire homogène est :
$$y(x) = A \exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)\right) = \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} \quad (A \in \mathbb{R})$$
On cherche alors la solution générale de $(\mathcal{E}_R)$ sur $]-1,1[$ par la méthode de la variation de la constante sous la forme $y(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, où A est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$. Celle-ci est solution de $(\mathcal{E}_R)$ si et seulement si :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sqrt{1-x^2}A'(x) + \frac{xA(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{xA(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \Longleftrightarrow \forall x \in -1,1[, \quad A'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1,1[, \quad A(x) = \arcsin(x) + \alpha$$
$$\Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1,1[, \quad y(x) = \frac{\arcsin(x)+\alpha}{\sqrt{1-x^2}}$$
La condition initiale donne $\alpha = y(0)$, donc la solution du problème $(\mathcal{P}_1)$ est
$$y(x) = \frac{\arcsin(x) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}}$$
Puisque F est l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$, on a :
$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\quad F(x) = \frac{\arcsin(x)+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}}.}.$$