Devoir surveillé n°3 (4h)

L'usage des calculatrices est interdit.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 : *Algèbre linéaire*

1. On définit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

   (a) Donner la valeur de $1 + j + j^2$.

   (b) Calculer J^2 et J^3.
   En déduire J^k en fonction de r, reste dans la division euclidienne de $k \in \mathbb{N}$ par 3.

   (c) Déterminer le polynôme caractéristique de J ainsi que ses valeurs propres.
   En déduire que J est diagonalisable.

   (d) Déterminer une matrice P inversible dont la première ligne est $(1\ 1\ 1)$ telle que :
   $$J = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   (e) Calculer $P\overline{P}$ où $\overline{P}$ désigne la matrice conjuguée de P. En déduire P^{-1}.

   (f) On pose $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$.

   Exprimer $A(a,b,c)$ en fonction de I_3, J et J^2.
   En déduire que $A(a,b,c)$ est diagonalisable dans une base indépendante de a, b et c.
   Donner les valeurs propres de $A(a,b,c)$.

2. Dans cette question, on considère un entier $n \geq 3$ et on note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par :
   $$u(e_1) = e_n \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![2, n]\!],\ u(e_k) = e_{k-1}$$
   et U la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

   (a) Écrire la matrice U.

(b) Soit w une racine n-ième de l'unité et $x_w = \sum_{k=1}^{n} w^{k-1} e_k$.
Calculer $u(x_w)$ en fonction de w et de x_w.

(c) Montrer que u est diagonalisable.
Donner une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de u.

(d) Que peut-on dire de u^n ?

Exercice 2 : *Probabilités*

Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = \frac{\alpha}{2^{k+\ell}}$$

où α est une constante réelle.

1. Déterminer la loi de X en fonction de α. En déduire la valeur de α.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{P}(X \geq n)$.
4. Calculer les probabilité suivantes : $\mathrm{P}(X = Y)$ et $\mathrm{P}(X < Y)$.
5. On pose $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de Z.
6. On pose $T = X - Y$. Déterminer la loi du couple (Z, T) en précisant dans un premier temps les valeurs prises par ce couple. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
7. Calculer la loi conditionnelle de Z sachant l'événement $(X = k)$.

Problème : *Analyse*

Partie I

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \mathrm{d}t.$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et strictement positive.
3. Établir que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} u_{n-1}$.
4. Montrer que, lorsque n tend vers l'infini : $u_n \sim u_{n+1}$.
5. Montrer que la suite de terme général $(n+1)u_n u_{n+1}$ est constante (on précisera sa valeur).

6. Déduire de ce qui précède que, lorsque n tend vers l'infini : $\quad u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

7. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.

Partie II

Pour tout réel x de $]-1,1[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}.$$

1. Justifier que F est bien définie sur $]-1,1[$ et donner la valeur de $F(0)$.

2. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a, a]$.

3. En déduire que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et donner l'expression intégrale de $F'(x)$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de $]-1,1[$: $\quad F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

5. En déduire que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Partie III

Dans cette partie, on recherche les solutions développables en série entière sur $]-R,R[$, $R>0$, de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_R) : \ (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1, \ \forall x \in]-R,R[$$

sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \ \forall x \in]-R,R[$$

où, pour tout entier naturel n, a_n est un réel. On pose $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$.

1. Que vaut a_1 ?

2. Donner, pour tout entier naturel n non nul, une relation de récurrence reliant a_{n+1} et a_{n-1}.

3. Dans le cas où $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

4. Montrer que F est solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

5. En résolvant $(\mathcal{P}_1)$, trouver pour tout réel x de $]-1,1[$, une expression simplifiée de $F(x)$ avec la fonction arcsinus.