<u>Devoir surveillé n°2</u> (4h)

L'usage des calculatrices est interdit.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème 1 : *Algèbre linéaire*

Partie A : Étude d'endomorphismes tels que $u \circ u = 0$.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme non nul de E tel que $u \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$, r le rang de u et p la dimension du noyau de u.

1. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$.
   (b) En déduire que $r \leq \frac{n}{2}$ et $p \geq \frac{n}{2}$.

2. Pour cette question, on suppose que $n = 2$.

   (a) Justifier que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$.
   (b) Soient i un vecteur non nul appartenant à $\mathrm{Im}(u)$ et j un vecteur tel que $u(j) = i$.
   Montrer que (i, j) est une base de E.
   Donner la matrice de u dans cette base.

3. Pour cette question, on suppose que $n = 3$.

   (a) Montrer que $r = 1$. Quelle est la dimension de $\ker(u)$?
   (b) Soit k un vecteur de E n'appartenant pas à $\ker(u)$ et $i = u(k)$.
   Justifier l'existence d'un vecteur j de $\ker(u)$, non colinéaire à i.
   Démontrer que (i, j, k) est une base de E.
   Déterminer la matrice de u dans cette base.

Partie B : Application à un exemple.

On rappelle que $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, et $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble constitué des matrices inversibles de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, I désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et J est la matrice définie par

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est J.

   (a) Vérifier que $v \circ v = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

   (b) Déterminer le noyau et l'image de v. Préciser leur dimension.

   (c) Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle v ait pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Dans la suite, on notera P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{B}$.

2. On considère l'ensemble Δ des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $M = I + mJ$, $(m \in \mathbb{R})$.

   (a) Démontrer que le produit de deux matrices de Δ est une matrice de Δ.

   (b) L'ensemble Δ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

3. Soit $M = I + mJ$, où m est un réel non nul. On se propose dans cette question de trouver toutes les matrices X de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de l'équation (1) : $X^2 = M$.

   (a) Quelles sont les solutions de (1) appartenant à Δ ?

   (b) Justifier l'égalité $P^{-1}MP = N$, N désignant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Montrer qu'en posant $Y = P^{-1}XP$, l'équation (1) équivaut à l'équation (2) : $Y^2 = N$.

   (d) Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ solution de (2).
   Montrer que $YN = NY$. En déduire que Y est triangulaire supérieure et que $i = a$.

   (e) Résoudre l'équation (2).
   On vérifiera qu'il y a une infinité de solutions, dont on précisera la forme.

   (f) Exprimer alors les solutions de (1) à l'aide de la matrice P (aucun calcul n'est demandé).

Problème 2 : *Analyse*

Les deux parties sont entièrement indépendantes.

Partie I

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha 2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   On note $H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha 2^n}$ la somme de cette série lorsqu'elle converge.

2. Calculer $H(0)$.

3. (a) Justifier que $f : t \longmapsto \ln(1-t)$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et expliciter $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que $\forall t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $\ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$.

(c) Calculer $H(1)$.

(d) On pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{v_n}{2^n}$ et calculer sa somme.

Partie II

Pour $x > 0$ fixé, on considère la fonction f_x définie sur $]0, +\infty[$ par : $f_x(t) = \dfrac{2\mathrm{sh}\,(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}$.

1. (a) Montrer qu'il existe un unique réel a_x tel que, si l'on pose $f_x(0) = a_x$, la fonction f_x soit continue sur $[0, +\infty[$.

   (b) Déterminer, suivant la valeur de $x > 0$, la limite en $+\infty$ de f_x.

   (c) En déduire que pour $x \in]0, 1[$, il existe une constante M strictement positive telle que :

$$\forall t \geq 0,\ |f_x(t)| \leq M.$$

2. (a) Donner, lorsqu'elle existe, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

   (b) Pour quelles valeurs de $x > 0$ l'intégrale $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

   (c) Calculer la valeur de l'intégrale $G(1/2)$.

   (d) À l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^{-t/3}$, calculer la valeur de l'intégrale $G(1/3)$.

3. Dans cette question on suppose que $x \in]0, 1[$.

   (a) Montrer que, quel que soit l'entier naturel p non nul, on a :

$$\forall t \geq 0,\ f_x(t) = 2\mathrm{sh}\,(xt) \sum_{n=1}^{p} \mathrm{e}^{-nt} + \mathrm{e}^{-pt} f_x(t).$$

   (b) Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f_x(t)\mathrm{d}t = 0.$$

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir la convergence puis calculer la valeur de l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{sh}\,(xt)\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t.$$

4. En déduire, pour tout $x \in]0, 1[$, une expression de $G(x)$ comme somme d'une série.

5. Après avoir établi la convergence des séries suivantes, calculer leurs sommes en utilisant ce qui précède :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{9n^2 - 1}.$$