Corrigé du DS N°2 — 2024/2025

Problème 1

A) 1) a) Soit $y \in \mathrm{Im}\, u$. $\exists x \in E$; $y = u(x)$

$u(y) = u(u(x)) = u \circ u(x) = 0_E$ donc $y \in \ker u$.

On a donc $\boxed{\mathrm{Im}\, u \subset \ker u}$.

b) D'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \mathrm{Im}\, u + \dim \ker u$

soit $n = r + p$.

Par ailleurs, d'après le a) $r \le p$

Nous avons donc $r + r \le p + r = n$ soit $\boxed{r \le \frac{n}{2}}$

et $p + p \ge p + r = n$ soit $\boxed{p \ge \frac{n}{2}}$

2) a) On a $r \le 1$ mais comme u est non nul, $r \neq 0$ d'où $r = 1 = p$.

$\dim \mathrm{Im}\, u = \dim \ker u$ et comme $\mathrm{Im}\, u \subset \ker u$, on a $\boxed{\mathrm{Im}\, u = \ker u}$

b) Supposons $ai + bj = 0_E$. On a alors $au(i) + bu(j) = 0_E$ soit $bi = 0_E$

et comme $i \neq 0_E$, $b = 0$ d'où $a = 0$. La seule combinaison linéaire nulle est celle à coefficients tous nuls.

(i,j) est libre de cardinal 2. Comme $\dim E = 2$, (i,j) est donc une base de E. $\boxed{\mathrm{Mat}_{(i,j)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3) a) On a $r \le \frac{3}{2}$ et $r \neq 0$. Comme $r \in \mathbb{N}$, on en déduit $r = 1$

et d'après le théorème du rang $\boxed{p = 2}$

b) Soit $k \notin \ker u$, $i = u(k)$. $i \neq 0_E$ et $i \in \ker u$ (car $u \circ u(k) = 0_E$).

(i) est donc une famille libre de $\ker u$ qui peut être complétée en une base de $\ker u$: (i,j) car $\dim \ker u = 2$. (i,j) étant libre, j n'est donc pas colinéaire à i.

Montrons que (i,j,k) est une base de E. Il suffit de montrer la liberté car $\dim E = 3$. Supposons $ai + bj + ck = 0_E$.

$u(ai + bj + ck) = u(0_E) = 0_E$ donc par linéarité $c\,u(k) = 0_E$

et comme $u(k) \neq 0_E$ on a $c = 0$.

Il reste donc $ai + bj = 0_E$ et comme (i,j) est libre $a = b = 0$

La seule combinaison linéaire nulle de i, j et k est celle à coefficients tous nuls donc (i,j,k) est libre et c'est une base de E.

$\boxed{\mathrm{Mat}_{(i,j,k)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ ((i,j) étant une base de $\ker u$, $u(i) = u(j) = 0_E$ et par ailleurs $u(k) = i$ par construction)

B) 1) a) Matriciellement, $J^2 = 0$ donc $v \circ v = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

b) $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Im}\, v$ est de dimension 1

D'après le théorème du rang $\dim \ker v = 2$.

En regardant les vecteurs-colonnes de J on a $\boxed{\ker v = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

c) On cherche une base $\mathcal{B} = (i,j,k)$ où (i,j) constitue une base de $\ker v$ et telle que $v(k) = i$. On choisit i dans $\mathrm{Im}\, v$. ($i \in \ker v$ car $\mathrm{Im}\, v \subset \ker v$).

On prend par exemple pour i le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et pour k le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On pose $j = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie que (i,j,k) est une base de E : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

$\mathrm{Mat}_{(i,j,k)}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ par choix des vecteurs i, j et k

2) (a) $\Delta = \{ I + mJ,\ m \in \mathbb{R} \}$. Soit $(m, m') \in \mathbb{R}^2$.

$(I + mJ)(I + m'J) = I + (m + m')J + mm'J^2$. Or $J^2 = 0$

donc $(I + mJ)(I + m'J) = I + (m + m')J \in \Delta$

Δ est stable par $\times$.

(b) Δ ne contient pas la matrice nulle ($I + mJ = 0$ n'a pas de solution). Δ n'est donc pas un sev de $M_3(\mathbb{R})$

3) Soit $N = I + mJ$ où $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Soit $X = I + xJ$ matrice de Δ.

$X^2 = N \iff (I + xJ)^2 = N \iff I + 2xJ = I + mJ$

$\iff x = \frac{m}{2}$.

$\boxed{(1) \text{ admet une unique solution dans } \Delta : I + \frac{m}{2}J}$

b) $P^{-1}NP = P^{-1}(I + mJ)P = P^{-1}P + mP^{-1}JP = I + m\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d'après la question 1c), d'où $P^{-1}NP = N$.

c) $X^2 = N \iff P^{-1}X^2P = P^{-1}NP \iff (P^{-1}XP)^2 = N \iff Y^2 = N$

en posant $Y = P^{-1}XP$.

d) Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ solution de (2).

$YN = YY^2 = Y^2Y = NY$. N et Y commutent.

Or $YN = \begin{pmatrix} a & b & c+am \\ d & e & f+dm \\ g & h & i+gm \end{pmatrix}$ et $NY = \begin{pmatrix} a+gm & b+hm & c+im \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$YN = NY \iff \begin{cases} gm = 0 \\ hm = 0 \\ dm = 0 \\ am = im \end{cases}$ et comme $m \neq 0$ $\begin{cases} g = h = d = 0 \\ a = i \end{cases}$

Y est donc triangulaire supérieure et $i = a$

e) $Y^2 = N \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^2 = N \iff \begin{pmatrix} a^2 & b(a+e) & 2ac+bf \\ 0 & e^2 & f(a+e) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = N$

$\iff \begin{cases} a^2 = e^2 = 1 \\ b(a+e) = f(a+e) = 0 \\ 2ac+bf = m \end{cases}$

Si $a+e=0$, b et f sont quelconques, $c = \frac{m-bf}{2a}$,

$a = -e = 1$ ou $a = -e = -1$

$Y = \begin{pmatrix} 1 & b & m-bf \\ 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & b & bf-m \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $(b,f) \in \mathbb{R}^2$. (infinité de solutions)

Si $a+e \neq 0$ $b = f = 0$, $a = e = 1$ ou $a = e = -1$, $c = \frac{m}{2a}$

$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{m}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -m/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Finalement, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est constitué de toutes les matrices obtenues précédemment et il existe une infinité de solutions.

f) Les solutions de (1) sont alors toutes les matrices de la forme PYP^{-1} où $Y \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ désignant l'ensemble des solutions de e)

Problème 2

Partie I

① On applique la règle de d'Alembert.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \times \dfrac{1}{2} \sim \dfrac{n^\alpha}{n^\alpha} \times \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} < 1$.

On en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

② $H(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$ (somme d'une série géométrique). $\boxed{H(0)=1}$

③ a) $t \mapsto \ln t$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $[0,\frac{1}{2}]$, $t \mapsto 1-t$ est $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs dans $[\frac{1}{2},1]$ donc dans $\mathbb{R}^{+*}$. Par composition, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\frac{1}{2}]$. En calculant f' et f'', on conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f^{(n)}(t) = -\dfrac{(n-1)!}{(1-t)^n}}$

On montre alors le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : pour $n=1$, $\forall t \in [0,\frac{1}{2}]$, $f'(t) = \dfrac{-1}{1-t} = -\dfrac{0!}{(1-t)^1}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons : $\forall t \in [0,\frac{1}{2}]$, $f^{(n)}(t) = -\dfrac{(n-1)!}{(1-t)^n} = -(n-1)!\,(1-t)^{-n}$

On a alors $f^{(n+1)}(t) = -(n-1)!\,(-n)\,(-1)\,(1-t)^{-n-1}$

d'où $f^{(n+1)}(t) = -\dfrac{n!}{(1-t)^{n+1}}$.

Par principe de récurrence simple, le résultat est établi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre 0 et t où $t \in [0,\frac{1}{2}]$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\frac{1}{2}]$ donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$\forall t \in [0,\frac{1}{2}]$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| = \dfrac{n!}{(1-t)^{n+1}} \leq \dfrac{n!}{(1-\frac{1}{2})^{n+1}} = 2^{n+1} n! = M_n$

On a donc pour $t \in [0,\frac{1}{2}]$:

$$\left|f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(t-0)^k\right| \leq \frac{M_n |t-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Comme $f(0)=0$ et $f^{(k)}(0) = -(k-1)!$ (pour $k \geq 1$), on obtient

$$\left|f(t) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-1)!}{k!} t^k\right| \leq \frac{2^{n+1} n! |t|^{n+1}}{(n+1)!}$$

et comme $t \in [0,\frac{1}{2}]$:

$$\left|f(t) - \left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k}\right)\right| \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où $\forall t \in [0,\frac{1}{2}]$, $-\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1-t)$.

Finalement $\boxed{\forall t \in [0,\tfrac{1}{2}],\ \ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k}}$

c) $H(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$. En appliquant la formule du b) à $t=\frac{1}{2}$, il vient :

$\ln(1-\frac{1}{2}) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ et finalement $\boxed{H(1) = \ln 2}$

d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{u_n}{2^n}$ est la série produit de Cauchy des séries $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{1}{n2^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq0} \frac{1}{2^n}$

On pose $u'_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n2^n} & \text{si } n\neq0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $v'_n = \dfrac{1}{2^n}$ pour $n \geq 0$.

La série produit de Cauchy de $\sum U'_n$ et $\sum V'_n$ est la série $\displaystyle\sum_{n\geq0} W_n$ où

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k v'_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}\,\frac{1}{2^{n-k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^n} = \frac{u_n}{2^n} \text{ pour } n\geq1 \text{ et } W_0 = 0$$

Comme $\sum u'_n$ et $\sum v'_n$ convergent absolument, $\sum W_n$ converge absolument et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U'_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} V'_n\right)$ et comme W_0 et $U'_0 = 0$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} W_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U'_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} V'_n\right)$.

Finalement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) = H(1) \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2H(1)$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} = 2\ln 2}$$

Partie II

① a) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{2xt}{t} \underset{0}{\sim} 2x$. $f_x(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 2x$

Pour $x=0$, $f_0(t) = 0$.

f_x étant continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, en posant $\boxed{a_x = 2x}$, $f_x(t) \xrightarrow[t\to 0]{} a_x$

f_x est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f_x(0) = a_x$.

b) $\forall x>0$, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{xt}}{e^t}$ donc $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{(x-1)t}$

$\boxed{\text{Pour } x>1,\ f_x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty,\ \text{pour } x=1,\ f_x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1 \text{ et pour } x \in]0,1[,\ f_x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}$

c) Soit $x \in]0,1[$. $f_x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. On a donc pour $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\exists A \in \mathbb{R}^+ \ ; \ \forall t \geq A, \ |f_x(t)| \leq \varepsilon.$$

De plus, f_x est continue sur le segment $[0,A]$ donc y est bornée.

$$\exists K \in \mathbb{R}^{+*} ; \ \forall t \in [0,A], \ |f_x(t)| \leq K.$$

On a donc : $\underline{\forall t \geq 0, \ |f_x(t)| \leq M}$ où $M = \max(K, \varepsilon)$.

② a) Le cours donne : $\underline{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt \text{ converge} \iff \alpha > 0}$

On a alors $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}}$.

b) f_x est continue sur $[0,+\infty[$ (cf question ①a)). On suppose $\underline{x>0}$.

$\underline{\text{En } +\infty}$, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{(x-1)t}$ (comme vu en ①b))

et d'après le ②a), $\boxed{\int_0^{+\infty} f_x(t)\,dt \text{ converge lorsque } x \in]0,1[}$

par comparaison d'intégrales de fonctions de signe constant.

c) $G\left(\frac{1}{2}\right)$ est convergente.

$$G\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^t - 1}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{t/2} - e^{-t/2}}{e^{t/2}(e^{t/2} - e^{-t/2})}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,dt = 2$$

$\boxed{G\left(\frac{1}{2}\right) = 2}$

d) $G\left(\frac{1}{3}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}}}{e^t - 1}\,dt$. Posons $u = \varphi(t) = e^{-\frac{t}{3}}$

$\underline{\varphi \text{ est } C^1, \text{ bijective de } \mathbb{R}^+ \text{ sur }]0,1]}$. $du = -\frac{1}{3}e^{-t/3}\,dt$. $dt = -\frac{3}{u}\,du$

$$G\left(\tfrac{1}{3}\right) = \int_1^0 \frac{\frac{1}{u} - u}{\frac{1}{u^3} - 1}\left(-\frac{3}{u}\right)du = 3\int_0^1 \frac{u - u^3}{1 - u^3}\,du$$

$$G\left(\tfrac{1}{3}\right) = 3\int_0^1 \frac{u(1-u)(1+u)}{(1-u)(1+u+u^2)}\,du = 3\int_0^1 \frac{u^2+u}{u^2+u+1}\,du$$

$$G\left(\tfrac{1}{3}\right) = 3\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{u^2+u+1}\right)du = 3 - 3\int_0^1 \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$G\left(\tfrac{1}{3}\right) = 3 - 3\times\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = 3 - 2\sqrt{3}\left(\operatorname{Arctan}\sqrt{3} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

et finalement $\boxed{G\left(\frac{1}{3}\right) = 3 - 2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}}$

③ $\underline{\text{On suppose que } x \in]0,1[}$.

a) $\underline{\text{Soit } p \in \mathbb{N}. \ \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \text{ on a :}}$

$$2\operatorname{sh}(xt)\sum_{n=1}^{p} e^{-nt} = 2\operatorname{sh}(xt)\,e^{-t}\,\frac{1-e^{-pt}}{1-e^{-t}}$$

(Somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{-t} \neq 1$ pour $t \neq 0$)

$$= \frac{2\operatorname{sh}(xt)}{e^t - 1} - \frac{2\operatorname{sh}(xt)}{e^t-1}\,e^{-pt}$$

d'où $2\operatorname{sh}(xt)\sum_{n=1}^{p} e^{-nt} = f_x(t) - f_x(t)e^{-pt}$

et finalement, $\boxed{f_x(t) = 2\operatorname{sh}(xt)\sum_{n=1}^{p} e^{-nt} + f_x(t)e^{-pt}}$

$\underline{\text{L'égalité est encore vérifiée pour } t=0, \text{ et est donc valable sur } \mathbb{R}^+.}$

b) D'après la question ①c) comme $x \in]0,1[$, il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ / $\forall t \geq 0$, $|f_x(t)| \leq M$

On a donc : $\left|\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_x(t)\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty} M e^{-pt}\,dt = \frac{M}{p}$

On en déduit (par encadrement) que $\boxed{\lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_x(t)\,dt = 0}$

c) Posons $g(t) = sh(xt)e^{-nt}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$

<u>g est continue sur $\mathbb{R}^+$</u>

<u>En $+\infty$</u>, $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{xt}e^{-nt}}{2}$ (car $x \in]0,1[$ donc $x>0$)

$g(t) \sim \dfrac{e^{(x-n)t}}{2}$

Comme $x-m<0$ (puisque m est un entier non nul et $x \in]0,1[$), $\int_0^{+\infty} e^{(x-n)t}dt$ converge, et par comparaison de fonctions positives, il en va de même de $\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

$\boxed{\int_0^{+\infty} sh(xt)e^{-nt}dt \text{ converge}}$ Calculons-la.

$$\int_0^{+\infty} sh(xt)e^{-nt}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(x-n)t} - e^{(-x-n)t}}{2}dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{(x-n)t}dt - \int_0^{+\infty} e^{-(x+n)t}dt\right)$$

(les deux intégrales sont bien convergentes !)

d'où $\int_0^{+\infty} sh(xt)e^{-nt}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$

et finalement $\boxed{\int_0^{+\infty} sh(xt)e^{-nt}dt = \frac{x}{m^2-x^2}}$

---

4) $G(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t)\,dt = 2\sum_{n=1}^{p} \int_0^{+\infty} sh(xt)e^{-mt}dt + \int_0^{+\infty} e^{-pt}f_x(t)\,dt$.

d'après la question 3) a), pour tout $x \in]0,1[$

D'après le 3) c), $G(x) = 2\sum_{n=1}^{p} \frac{x}{n^2-x^2} + \int_0^{+\infty} e^{-pt}f_x(t)dt$.

Par ailleurs, $\int_0^{+\infty} e^{-pt}f_x(t)dt \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le 3) b). $\sum \frac{1}{n^2-x^2}$ converge (ce que l'on sait déjà car $\frac{1}{n^2-x^2} \sim \frac{1}{n^2}$) et par passage à la limite quand p tend vers $+\infty$, on a : $\boxed{\forall x \in]0,1[\quad , \quad G(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2-x^2}}$

---

5) $\frac{1}{4n^2-1} \sim \frac{1}{4n^2}$ et $\frac{1}{9n^2-1} \sim \frac{1}{9n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge $(2>1)$, par comparaison de séries à termes positifs, il en va de même de $\sum \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum \frac{1}{9n^2-1}$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}G\left(\frac{1}{2}\right)$ d'après le 4) d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}}$ d'après 2) c)

De même, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n^2-1} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\frac{1}{9}} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} G\left(\frac{1}{3}\right)$ d'après le 4)

ce qui donne $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$ (d'après le 2) d)).