Devoir surveillé n°1 (4h)

L'usage des calculatrices est interdit.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème 1 : Géométrie

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-1, 0)$ de rayon 1 et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -1$.

1. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
2. Soit Δ_t la droite passant par O de vecteur directeur $\vec{v}(t) = t\vec{i} + \vec{j}$.
 - (a) Donner les coordonnées du point $A(t)$, intersection de Δ_t et $\mathcal{D}$.
 - (b) Déterminer les coordonnées du point $B(t)$, intersection de Δ_t et $\mathcal{C}$, autre que O .
 - (c) Soit $I(t)$ le milieu du segment $[A(t)B(t)]$. Déterminer les coordonnées de $I(t)$.
3. Soit Γ la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) &= t + \frac{2t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= 1 + \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On note $M(t)$ le point de Γ de paramètre t .

- (a) Montrer que l'équation $t^3 - t^2 + 3t + 1 = 0$ n'admet qu'une solution réelle et que celle-ci appartient à l'intervalle $] -1, 0[$. On la notera α .
- (b) En déduire les variations de $x : t \mapsto t + \frac{2t^2}{1+t^2}$ et étudier celles de $y : t \mapsto 1 + \frac{2t}{1+t^2}$.
- (c) Étudier les branches infinies de Γ .
- (d) Déterminer la nature du point $M(-1)$. On donnera un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(-1)$, ainsi que la position locale de la courbe par rapport à cette tangente.
- (e) Calculer les coordonnées des points d'intersection de Γ avec les axes de coordonnées.
- (f) Tracer la courbe Γ en faisant apparaître tous les éléments géométriques précédents.

Partie B

On note $\mathcal{E}$ la courbe plane d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 4$.

1. Justifier que $\mathcal{E}$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. On note M_t le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(2 \cos(t), \sin(t))$.
 - (a) Justifier que $\mathcal{E}$ admet une tangente $\mathcal{T}_t$ en M_t et donner un vecteur directeur de $\mathcal{T}_t$.
 - (b) Soit $\mathcal{N}_t$ la droite perpendiculaire à $\mathcal{T}_t$ en M_t . Montrer que la famille de droites $(\mathcal{N}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ admet une enveloppe et déterminer une représentation paramétrique de cette enveloppe.
3. Soit γ la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = \frac{3}{2} \cos^3(t) \\ y(t) = -3 \sin^3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

On notera $m(t)$ le point de γ de paramètre t .

- (a) Justifier que l'on peut restreindre l'étude de γ à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et préciser par quelles transformations du plan la courbe sera complétée.
- (b) Justifier que γ admet deux points stationnaires de paramètres $t_1, t_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ à préciser. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à γ en chacun de ces points.
- (c) Dresser le tableau des variations de $x : t \mapsto \frac{3}{2} \cos^3(t)$ et $y : t \mapsto -3 \sin^3(t)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (d) Tracer γ et $\mathcal{E}$ dans un même repère d'unité bien choisie.

indication : le tracé de $\mathcal{E}$ peut se faire par une simple interprétation de son paramétrage, sans en faire l'étude.

Problème 2 : Analyse

Soit $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et D^* l'ensemble D privé de 0.

On dit qu'une fonction f vérifie la relation (R) si elle est définie sur E et si elle vérifie :

$$\forall x \in E, 4f(x) = f\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right).$$

1. Justifier que la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$ est définie sur E , périodique de période π et qu'elle vérifie la relation (R).
2. Soit f une application vérifiant la relation (R), bornée sur E et soit $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, |f(x)| \leq M.$$

- (a) Soit $x \in E$ fixé. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x)| \leq \frac{M}{2^n}$.
- (b) En déduire que f est nulle sur E .

3. Soit la fonction φ définie sur D par $\varphi(0) = \frac{1}{3}$ et $\forall x \in D^*$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$.

(a) Montrer que φ est continue et bornée sur D .

(b) Soit la fonction Φ définie sur D par $\Phi(0) = 0$ et $\forall x \in D^*$, $\Phi(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{1}{x}$.

Montrer que Φ est l'unique primitive de φ sur D qui s'annule en 0.

4. Soit $u_k = \frac{1}{(2k-1)^2}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge.

(b) On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, son reste d'ordre $n \geq 1$.

À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $\forall n \geq 1$, $0 \leq R_n \leq \frac{1}{2(2n-1)}$.

5. On pose $h(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2} \right]$.

(a) Montrer que $h(x)$ est bien défini pour tout réel $x \in E$.

(b) Montrer que h est une fonction périodique de période π .

(c) Montrer que l'application h vérifie la relation (R).

6. Soit $x \in D$ fixé. On pose $v_k = \frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2}$.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_k \leq \frac{8}{\pi^2} u_k$.

7. En déduire que l'application $\psi : x \mapsto h(x) - \frac{1}{x^2}$ est bornée sur D^* .

8. Soit d l'application définie sur E par $d(x) = g(x) - h(x)$.

(a) Montrer que $\forall x \in D^*$, $|d(x)| \leq |\varphi(x)| + |\psi(x)|$.

(b) En déduire que d est bornée sur D^* , puis qu'elle est bornée sur E .

(c) Montrer que d vérifie la relation (R). En déduire que d est nulle sur E .

9. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in D^*$, $\int_0^x \varphi(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{-2x}{x^2 - k^2\pi^2} + \Psi_n(x)$, où $|\Psi_n(x)| \leq \frac{4}{\pi} R_n$

10. En déduire que $\forall x \in D^*$, $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}$.