Problème 1. Partie A.

① $\boxed{\mathcal{C} : (x+1)^2 + y^2 = 1}$

② a) Δ_t a par représentation paramétrique $\begin{cases} x = \lambda t \\ y = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

$A(t) : \begin{cases} x = \lambda t \\ y = \lambda \\ y = -1 \end{cases}$ d'où $\lambda = -1$ et $\boxed{A(t)\,(-t,-1)}$

b) $\Delta_t \cap \mathcal{C} : \begin{cases} x = \lambda t \\ y = \lambda \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ d'où $(\lambda t + 1)^2 + \lambda^2 = 1$

soit $\lambda^2(t^2+1) + 2\lambda t = 0$

$\lambda\left(\lambda(t^2+1) + 2t\right) = 0$

$\lambda \neq 0$ (car on cherche le point d'intersection autre que O) d'où $\lambda = -\frac{2t}{t^2+1}$

$\boxed{B(t)\left(-\frac{2t^2}{t^2+1}, -\frac{2t}{t^2+1}\right)}$

c) $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{t}{2} - \frac{t^2}{t^2+1}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{t}{t^2+1}$.

$\boxed{I\left(-\frac{1}{2}\left(t + \frac{2t^2}{t^2+1}\right), -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2t}{t^2+1}\right)\right)}$

③ a) Posons $f(t) = t^3 - t^2 + 3t + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = 3t^2 - 2t + 3$. $\Delta < 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) > 0$, d'où les variations :

t	$-\infty$	-1	α	0	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	-4	0	1	↗ $+\infty$

D'après le théorème de la bijection, f étant continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc 0 admet un unique antécédent par f, noté α, et l'équation $f(t) = 0$ admet donc une unique solution α.
Comme $f(-1) = -4$ et $f(0) = 1$, $\alpha \in]-1, 0[$.

b) x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + \frac{4t(1+t^2) - 2t \cdot 2t^2}{(1+t^2)^2} = 1 + \frac{4t}{(1+t^2)^2} \\ y'(t) = \frac{2(1+t^2) - 2t \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2 - 2t^2}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, \; x'(t) = \frac{(1+t^2)^2 + 4t}{(1+t^2)^2} = \frac{t^4 + 2t^2 + 4t + 1}{(1+t^2)^2} = \frac{(t+1)(t^3 - t^2 + 3t + 1)}{(1+t^2)^2}$

Nous en déduisons les variations de x.

t	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	0	↘	<0	↗	$+\infty$

$x(t) \underset{+\infty}{\sim} t$

Précisons les variations de y.

$\forall t \in \mathbb{R}, \; y'(t) = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$ d'où le tableau :

t	$-\infty$		-1		α	1		$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$		0	$-$	
y	1	↘	0	↗		2	↘	1

c) Γ présente une branche infinie quand $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers l'infini.

Cela se produit quand t tend vers $+\infty$ et t tend vers $-\infty$.

$x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ (car $\frac{2t^2}{1+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 2$) et $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$ (car $\frac{2t}{1+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$)

Γ possède donc une asymptote d'équation $y = 1$

Le résultat est le même quand $t \to -\infty$ car on a alors $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty \\ y(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 1 \end{cases}$.

d) Comme $x'(-1) = y'(-1) = 0$, $M(-1)$ est un point stationnaire.

On pose $t = -1 + h$.

$x(t) = t + \frac{2t^2 + 2 - 2}{1+t^2} = t + 2 - \frac{2}{1+t^2}$

$x(-1+h) = -1 + h + 2 - \frac{2}{1 + 1 - 2h + h^2} = 1 + h - \frac{1}{1 - h + \frac{h^2}{2}}$

$x(-1+h) = 1 + h - \left(1 + \left(h - \frac{h^2}{2}\right) + \left(h - \frac{h^2}{2}\right)^2 + \left(h - \frac{h^2}{2}\right)^3 + o(h^3)\right)$

$= 1 + h - \left(1 + h - \frac{h^2}{2} + h^2 - \cancel{h^3} + \cancel{h^3} + o(h^3)\right)$

$= \cancel{1} + \cancel{h} - \cancel{1} - \cancel{h} - \frac{1}{2}h^2 + o(h^3)$

$x(t) = -\frac{1}{2}(t+1)^2 + o\left((t+1)^3\right)$

$y(-1+h) = \dfrac{2(-1+h)}{2-2h+h^2} + 1 = \dfrac{-1+h}{1-(h-\frac{h^2}{2})} + 1$

$y(-1+h) = (-1+h) \times \underbrace{\left(1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^3)\right)}_{\text{en reprenant le dl de } \frac{1}{1-h+\frac{h^2}{2}} \text{ obtenu dans le calcul précédent}} + 1$

$y(-1+h) = -\cancel{1} - \cancel{h} - \frac{h^2}{2} + \cancel{h} + h^2 + \frac{h^3}{2} + o(h^3) + \cancel{1}$

$y(-1+h) = \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^3 + o(h^3)$

$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}(t+1)^2 + \frac{1}{2}(t+1)^3 + o((t+1)^3)}$

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(t+1)^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}} + \frac{1}{2}(t+1)^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} + (t+1)^3 \overrightarrow{\mathcal{E}(t)}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{E}(t)} \xrightarrow[t \to -1]{} \vec{0}$. $(\ast)$

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(-1)$

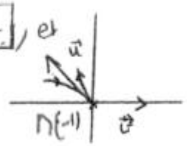
On se place dans $\mathcal{R} = (M(-1), \vec{u}, \vec{v})$ (cq $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on peut donc considérer ce repère)

Soit $(X(t), Y(t))$ les coordonnées de $M(t)$ dans $\mathcal{R}$.

$\overrightarrow{M(-1)M(t)} = X(t)\vec{u} + Y(t)\vec{v}$ et d'après $(\ast)$ $X(t) \underset{-1}{\sim} \frac{1}{2}(t+1)^2$, $Y(t) \underset{-1}{\sim} \frac{1}{2}(t+1)^3$

X est positive au voisinage de -1 et Y change de signe.

$\boxed{M(-1) \text{ est donc un point de rebroussement de première espèce}}$, et l'allure de la courbe au voisinage de $m(-1)$ est la suivante :



---

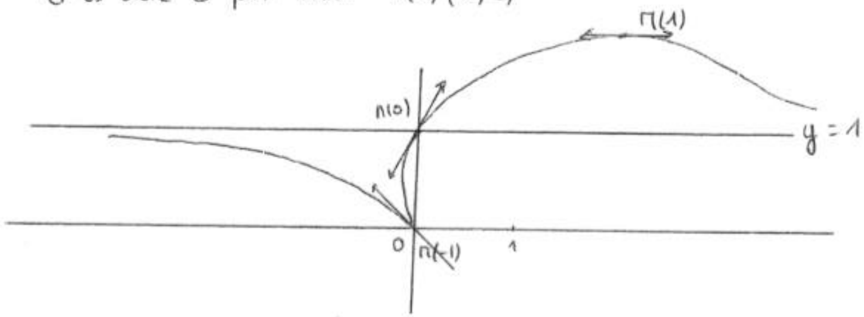
e) $x(t) = 0 \iff 2t^2 = -t - t^3 \iff t(t^2+2t+1) = 0 \iff t(t+1)^2 = 0$

d'où $x(t) = 0 \iff t = 0$ ou $t = -1$

Les points d'intersection de Γ avec l'axe (Oy) sont les points $M(-1)$ (point stationnaire étudié à la question 3 d)) et $M(0)$, point de coordonnées $(0,1)$. En ce point, la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées $(x'(0), y'(0))$, soit $(1,2)$

$y(t) = 0 \iff \frac{2t}{1+t^2} = -1 \iff (1+t)^2 = 0 \iff t = -1$. On retrouve le point $M(-1)$, confondu avec l'origine du repère. C'est le seul point d'intersection de Γ avec (Ox).

f) En $M(1)$, la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées $(x'(1), y'(1))$ où $y'(1) = 0$ et est donc de pente nulle. $M(1)\ (2,2)$



Problème 1, partie B

① $x^2+4y^2=4 \iff \left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1 \iff \exists t\in\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases}\frac{x}{2}=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$.

$\mathcal{E}$ a donc pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

NB $\mathcal{E}$ est une ellipse.

---

② a) $\frac{d\overrightarrow{M_t}}{dt}$ a pour coordonnées $(-2\sin t, \cos t)$. Comme les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas simultanément, ce vecteur n'est pas nul et $\mathcal{E}$ possède donc une tangente en M_t dirigée par $\frac{d\overrightarrow{M_t}}{dt}$.

---

b) $\mathcal{D}_t$ est la droite passant par M_t et de vecteur directeur $\vec{u}_t(\cos t, 2\sin t)$.

$t\mapsto M_t$ et $t\mapsto \vec{u}_t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{Det}\left(\frac{d\vec{u}_t}{dt},\vec{u}_t\right)=\begin{vmatrix}-\sin t & \cos t\\ 2\cos t & 2\sin t\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

La famille $(\mathcal{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ possède une (unique) enveloppe notée Γ dans la suite.

$$M\in\Gamma \iff \begin{cases}\exists\lambda(t)\in\mathbb{R}\ ;\ M=M_t+\lambda(t)\vec{u}_t & \text{(le point } M \text{ appartient à } \Delta_t)\\ \Delta_t \text{ est la tangente à } \Gamma \text{ en } M\ (*)\end{cases}$$

Sous réserve que M soit régulier, on a :

$$\begin{aligned}(*) &\iff \mathrm{Det}\left(\frac{d\vec{M}}{dt}(t),\vec{u}_t\right)=0\\ &\iff \mathrm{Det}\left(\frac{d\overrightarrow{M_t}}{dt}+\lambda'(t)\vec{u}_t+\lambda(t)\frac{d\vec{u}_t}{dt},\vec{u}_t\right)=0\\ &\iff \mathrm{Det}\left(\frac{d\overrightarrow{M_t}}{dt},\vec{u}_t\right)+\lambda(t)\,\mathrm{Det}\left(\frac{d\vec{u}_t}{dt},\vec{u}_t\right)=0 \quad \text{(par bilinéarité du déterminant)}\\ &\iff \lambda(t)=-\frac{\mathrm{Det}\left(\frac{d\vec{M}}{dt},\vec{u}_t\right)}{\mathrm{Det}\left(\frac{d\vec{u}_t}{dt},\vec{u}_t\right)}.\end{aligned}$$

Γ a alors pour représentation paramétrique :

$$t\mapsto M_t-\frac{\mathrm{Det}\left(\frac{d\overrightarrow{M_t}}{dt},\vec{u}_t\right)}{\mathrm{Det}\left(\frac{d\vec{u}_t}{dt},\vec{u}_t\right)}\vec{u}_t.$$

$$\mathrm{Det}\left(\frac{d\overrightarrow{M_t}}{dt},\vec{u}_t\right)=\begin{vmatrix}-2\sin t & \cos t\\ \cos t & 2\sin t\end{vmatrix}=-4\sin^2 t-\cos^2 t$$

Γ a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x(t)=2\cos t-\frac{1}{2}(4\sin^2 t+\cos^2 t)\cos t\\ y(t)=\sin t-(4\sin^2 t+\cos^2 t)\sin t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

soit $\begin{cases}x(t)=2\cos t-\frac{1}{2}(4(1-\cos^2 t)+\cos^2 t)\cos t\\ y(t)=\sin t-(4\sin^2 t+1-\sin^2 t)\sin t\end{cases}$

$$\boxed{\Gamma\ \begin{cases}x(t)=\frac{3}{2}\cos^3 t\\ y(t)=-3\sin^3 t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.}$$

---

③ La courbe γ étudiée est l'enveloppe étudiée à la question précédente.

a) x et y sont 2π-périodiques. $m(t+2\pi)=m(t)$, pour tout t.

$\begin{cases}x(t+\pi)=-x(t)\\ y(t+\pi)=-y(t)\end{cases}$. On restreint l'étude à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et on complétera la courbe par symétrie de centre O.

x est paire et y est impaire. On peut donc encore restreint l'étude à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Il faudra compléter la courbe par symétrie orthogonale par rapport à (Ox).

---

b) x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\begin{cases}x'(t)=\frac{9}{2}\cos^2 t(-\sin t)\\ y'(t)=-9\sin^2 t\cos t\end{cases}$. $m(t)$ est stationnaire $\iff \begin{cases}x'(t)=0\\ y'(t)=0\end{cases}$. Sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, il existe donc deux points stationnaires de paramètres $t_1=0$ et $t_2=\frac{\pi}{2}$.

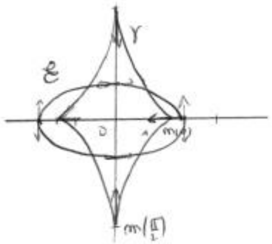
$$\begin{cases}x''(t)=\frac{9}{2}2\cos t\sin^2 t-\frac{9}{2}\cos^3 t\\ y''(t)=-18\sin t\cos^2 t+9\sin^3 t\end{cases}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix}x''(0)\\ y''(0)\end{pmatrix}$ est non nul. $\vec{u}\begin{pmatrix}-9/2\\ 0\end{pmatrix}$ (ou plus simplement $\vec{i}$) dirige la tangente à γ en $m(0)$. La tangente est donc horizontale.

$\vec{v}\begin{pmatrix}x''(\pi/2)\\ y''(\pi/2)\end{pmatrix}$. $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ 9\end{pmatrix}$ (ou plus simplement $\vec{j}$) dirige la tangente à γ en $m\left(\frac{\pi}{2}\right)$, qui est donc horizontale.

c). $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x'(t) = -\frac{9}{2}\cos^2 t \sin t \\ y'(t) = -9 \sin^2 t \cos t \end{cases}$ d'où le tableau de variations :

t	0		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$-$	0
x	$3/2$	$\searrow$	0
y	0	$\searrow$	-3
$y'(t)$	0	$-$	0



Problème 2 : analyse

① g est définie sur E. $\forall x \in E$, $x+\pi \in E$ et $g(x+\pi) = \frac{1}{\sin^2(x+\pi)} = g(x)$. g est π-périodique.

$\forall x \in E$, $\frac{x+\pi}{2} \in E$ et $\frac{x}{2} \in E$.

$$g\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x+\pi}{2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin(x)\right)^2} = \frac{4}{\sin^2 x} = 4g(x)$$

$\boxed{\forall x \in E,\ 4g(x) = g\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + g\left(\frac{x}{2}\right)}$. g vérifie donc la relation (R).

② a) On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n = 0$, $|f(x)| \leq \Pi$ pour tout $x \in E$, par hypothèse sur f.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $|f(x)| \leq \frac{\Pi}{2^n}$, pour tout $x \in E$.

On a alors $|4f(x)| = \left|f\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leq \left|f\left(\frac{x+\pi}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leq 2\frac{\Pi}{2^n}$

(inégalité triangulaire)

d'où $4|f(x)| \leq \frac{\Pi}{2^{n-1}}$ ce qui conduit à $|f(x)| \leq \frac{\Pi}{2^{n+1}}$.

Ainsi, par récurrence simple, on a : $|f(x)| \leq \frac{\Pi}{2^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$.

b) Comme $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par encadrement, $f(x) = 0$, pour tout $x \in E$.

f est nulle sur E.

③ a) φ est continue sur D^* (par opérations sur les fonctions usuelles).

Étudions la continuité en 0.

$\forall x \in D^*$, $\varphi(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{\sin^2(x)\,x^2} = \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{\sin^2(x)\,x^2} = \frac{x^2 - \left(x^2 - 2\frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)}{x^2\sin^2 x}$

d'où $\varphi(x) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4}$.

$\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}$.

Nous avons donc $\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3} = \varphi(0)$. φ est donc continue en 0.

Finalement, φ est continue sur D.

Toute fonction continue sur un segment étant bornée, φ est bornée sur le segment D.

---

b) ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur D^* par opérations sur les fonctions usuelles.

$$\phi(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{x} = \frac{-x\cos x + \sin x}{x \sin x}.$$

$x\sin x \underset{0}{\sim} x^2$. $\quad -x\cos x + \sin x = -x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}$

d'où $\phi(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{3}$ et $\phi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = \phi(0)$. ϕ est continue sur D

$$\forall x\in D^*, \ \phi'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$$

D'après la question 3 a), $\phi'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, Φ est $\mathcal{C}^1$ sur D

On a par ailleurs : $\forall x\in D^*$, $\phi'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$ et $\phi'(0) = \varphi(0)$, autrement dit : $\forall x \in D$, $\phi'(x) = \varphi(x)$. ϕ est donc une primitive de φ et comme $\phi(0) = 0$, c'est bien l'unique primitive de φ s'annulant en 0.

---

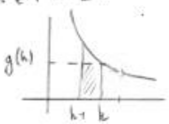
4 a) $u_k \sim \frac{1}{4k^2}$ et par comparaison avec une série de Riemann convergente ($\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$) la série de terme général u_k converge (par comparaison de séries à termes positifs).

---

b) Pour majorer le reste, comparons-le à une intégrale.

L'application $g : t \mapsto \frac{1}{(2t-1)^2}$ est positive, continue et décroissante sur $[1,+\infty[$.

Nous avons donc : $\forall k \geq 2 \ \ 0 \leq g(k) \leq \int_{k-1}^{k} g(t)\,dt$



$$\forall n\geq 1, \forall N \geq n+1, \ 0 \leq \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leq \int_n^N g(t)\,dt$$

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leq \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(2t-1)}\right]_n^N$$

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2N-1}$$

et en faisant tendre N vers $+\infty$, il vient :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \ 0 \leq R_n \leq \frac{1}{2(2n-1)}}$$

---

5 a) $\forall x \in E$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x - k\pi \neq 0$, $x + k\pi \neq 0$ et $x \neq 0$.

$\frac{1}{(x-k\pi)^2} \sim \frac{1}{k^2\pi^2}$ et $\frac{1}{(x+k\pi)^2} \sim \frac{1}{k^2\pi^2}$. Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, il en va de même de $\sum \left(\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2}\right)$

$h(x)$ est donc bien défini pour tout $x \in E$.

---

b) $\forall x \in E$, $x + \pi \in E$.

$h(x+\pi)$ existe et vaut $\frac{1}{(x+\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+\pi-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+\pi+k\pi)^2}\right)$

Les deux séries $\sum \frac{1}{(x+\pi-k\pi)^2}$ et $\sum \frac{1}{(x+\pi+k\pi)^2}$ étant convergentes, on a :

$$h(x+\pi) = \frac{1}{(x+\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-(k-1)\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+(k+1)\pi)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+\pi)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x-k\pi)^2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(x+k\pi)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+\pi)^2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(x+k\pi)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k\pi)^2} = g(x).$$

h est π-périodique.

---

c) h est bien définie sur E.

$$h\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + h\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x+\pi}{2}\right)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x+\pi}{2} - k\pi\right)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x+\pi}{2} + k\pi\right)^2}$$
$$+ \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{2} - k\pi\right)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{2} + k\pi\right)^2}$$

(Chaque nouvelle série introduite converge bien).

$$h\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + h\left(\frac{x}{2}\right) = \underbrace{\frac{4}{(x+\pi)^2}}_{(1)} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(x-(2k-1)\pi)^2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(x+(2k+1)\pi)^2}}_{(2)}$$

$$+ \frac{4}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(x-2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(x+2k\pi)^2}$$

$$= \Bigg(\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(x+(2k+1)\pi)^2}}_{\text{en regroupant (1) et (2)}} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(x+2k\pi)^2}\Bigg) + \Bigg(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(x-(2k-1)\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(x-2k\pi)^2} + \frac{4}{x^2}\Bigg)$$

$$= 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+k\pi)^2} + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{4}{x^2} = 4h(x).$$

L'application h vérifie bien la relation (R).

---

6. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a donc, pour tout $k \geq 1$:

$$0 \leq \frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2} \leq \frac{1}{\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2} \quad \text{(en minorant chaque dénominateur)}$$

d'où $0 \leq v_k \leq \dfrac{2}{\frac{1}{4}(2k\pi-\pi)^2}$ donc $0 \leq v_k \leq \dfrac{8}{\pi^2(2k-1)^2}$.

$$\boxed{\forall k \geq 1,\ 0 \leq v_k \leq \frac{8}{\pi^2} u_k}$$

---

7. Soit $x \in D^*$

$$\psi(x) = h(x) - \frac{1}{x^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2}\right) \leq \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \quad \text{d'après le 6.}$$

Comme par ailleurs $h(x) - \frac{1}{x^2} \geq 0$, ψ est bornée sur D^*.

---

8. a) $\forall x \in D^*$, $d(x) = g(x) - h(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2}\right]$

d'où $d(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. On a donc, par inégalité triangulaire :

$\forall x \in D^*$, $|d(x)| \leq |\varphi(x)| + |\psi(x)|$.

b) φ est bornée sur D donc sur D^* d'après la question 3 a). ψ est bornée sur D^* d'après la question 7.

$\exists M_1 \in \mathbb{R}^+ ; \forall x \in D^*,\ |\varphi(x)| \leq M_1$. $\exists M_2 \in \mathbb{R}^+ ; \forall x \in D^*,\ |\psi(x)| \leq M_2$

d'où : $\forall x \in D^*$, $|d(x)| \leq M_1 + M_2$ et d est donc bornée sur D^*.

Comme d est π-périodique (puisque g et h le sont d'après les questions 1 et 5 b)) d est bornée sur E.

---

c) g et h vérifient la relation (R) donc d vérifie aussi la relation (R).

$$\Big(d\left(\tfrac{x+\pi}{2}\right) + d\left(\tfrac{x}{2}\right) = g\left(\tfrac{x+\pi}{2}\right) - h\left(\tfrac{x+\pi}{2}\right) + g\left(\tfrac{x}{2}\right) - h\left(\tfrac{x}{2}\right)$$
$$= g\left(\tfrac{x+\pi}{2}\right) + g\left(\tfrac{x}{2}\right) - \left(h\left(\tfrac{x+\pi}{2}\right) + h\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)$$
$$= 4g(x) - 4h(x)$$
$$= 4d(x). \Big)$$

D'après la question 2, d étant bornée sur E et vérifiant la relation (R), d est nulle sur E.

---

9. $\forall x \in D^*$, $d(x) = 0$ et comme $d(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ il vient :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2}\right)$$

d'où $\displaystyle \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2}\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2}$.

φ est continue sur le segment de bornes 0 et x. On intègre :

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(t-k\pi)^2} + \frac{1}{(t+k\pi)^2}\right)dt + \underbrace{\int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(t-k\pi)^2} + \frac{1}{(t+k\pi)^2}\right)dt}_{=\psi_n(x)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_0^x \frac{1}{(t-k\pi)^2} + \frac{1}{(t+k\pi)^2}\,dt + \psi_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{t-k\pi} - \frac{1}{t+k\pi}\right]_0^x + \psi_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{x-k\pi} - \frac{1}{x+k\pi}\right) + \psi_n(x)$$

d'où $$\boxed{\int_0^x \varphi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{-2x}{x^2-k^2\pi^2} + \psi_n(x).}$$

Vérifions maintenant que : $\forall x \in D^*$, $|\Psi_n(x)| \leq \frac{4}{\pi} R_n$.

$$\Psi_n(x) = \int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(t-k\pi)^2} + \frac{1}{(t+k\pi)^2} \right) dt .$$

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad |\Psi_n(x)| \leq \int_0^x \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2} u_k \right) dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{8}{\pi^2} R_n \, dt = \frac{4}{\pi} R_n$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[, \quad |\Psi_n(x)| \leq \int_x^0 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2} u_k \, dt \leq \int_{-\pi/2}^0 \frac{8}{\pi^2} R_n \, dt = \frac{4}{\pi} R_n$$

d'où $\boxed{\forall x \in D^*, \quad |\Psi_n(x)| \leq \frac{4}{\pi} R_n .}$

---

(10) D'après la question (4) b), $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\Psi_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\underline{\int_0^x \varphi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2x}{x^2 - k^2\pi^2}}$.

D'après la question (3) b), ϕ est l'unique primitive de φ s'annulant en 0 sur D

On a donc $\int_0^x \varphi(t)\,dt = \phi(x)$.

On en déduit : $\forall x \in D^*$, $\phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2x}{x^2 - k^2\pi^2}$

$$\text{d'où} \quad -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2x}{x^2 - k^2\pi^2}$$

ce qui conduit à : $\boxed{\forall x \in D^*, \quad \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}}$
