Devoir de maison n°9

Problème 1 : *obtenir un DSE en résolvant une équation différentielle*

1. Montrer que $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/2}\mathrm{d}t$ est solution de $y' = 1 - xy$.
2. En déduire le développement en série entière de f et son rayon de convergence.

Problème 2 : *étude d'une famille d'endomorphismes - d'après Mines-Télécom 2024*

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, soit u non nul et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, u\rangle u,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.
2. Montrer que $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\exists m \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \circ f_\beta = f_m$.
   Exprimer m en fonction de α et β.
3. Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f_α est bijective ?

Problème 3 : *BON de Legendre - d'après oral II 2019*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $L_n(x) = \dfrac{n!}{(2n)!}.\dfrac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que L_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant 1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $\displaystyle\int_{-1}^1 L_n(t)Q(t)\mathrm{d}t = 0$.
3. En déduire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour un produit scalaire φ à préciser. Calculer $\|L_k\|$.