Éléments de correction du DM n°9

Problème 1 : *obtenir un DSE en résolvant une équation différentielle*

1. $\varphi : t \longmapsto e^{t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions continues.

   Donc $\Phi : x \longmapsto \int_0^x e^{t^2/2} dt$ est la primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui **s'annule en** 0, d'après le théorème fondamental du calcul intégral.

   Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions $\mathscr{C}^1$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -x e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2} dt + e^{-x^2/2} e^{x^2/2} = -x f(x) + 1.$$

   Donc $\boxed{f \text{ est } \textbf{la} \text{ solution sur } \mathbb{R} \text{ du } \textbf{problème de Cauchy linéaire } \mathscr{P} :\ y' = 1 - xy \text{ et } y(0) = 0}$.

2. On cherche la solution de $\mathscr{P}$ développable en série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur un intervalle $]-R, R[$. y est $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$ et, par dérivation terme à terme, on a :

   $$\forall x \in]-R, R[,\ y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \text{ et}$$

   $$\begin{aligned} y'(x) = 1 - xy(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &\Longleftrightarrow \quad a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \end{aligned}$$

   Par unicité du développement en série entière, on a : $a_1 = y'(0) = 1$ et

   $$\forall n \geq 1,\ (n+1) a_{n+1} = -a_{n-1} \Longleftrightarrow a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{n+1}.$$

   $a_0 = y(0) = 0$ et si $a_{2n} = 0$ à un rang $n \geq 0$ alors $a_{2n+2} = -\dfrac{a_{2n}}{2n+2} = 0$.

   Donc, par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0}$ et $\forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$.

   De plus, par un raisonnement en cascade, on a :

   $$a_{2n+1} = \frac{-a_{2n-1}}{2n+1} = \frac{(-1)^2 a_{2n-3}}{(2n+1)(2n-1)} = \cdots = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3} = \frac{(-1)^n 2^n (n!)}{(2n+1)!}.$$

   Ainsi, par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = \dfrac{(-2)^n (n!)}{(2n+1)!}}$. On pose $u_n = a_{2n+1} x^{2n+1}$.

   Pour $x \neq 0$, on a : $\left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \dfrac{|x|^2}{2n+3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$.

   Par la règle de d'Alembert, $\boxed{R\left(\sum a_{2n+1} x^{2n+1}\right) = +\infty \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-2)^n (n!)}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$.

Problème 2 : *étude d'une famille d'endomorphismes - d'après Mines-Télécom 2024*

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, soit u non nul et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, u\rangle u,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit scalaire étant une forme bilinéaire, On a :

$$\begin{array}{rcl} f_\alpha(x) & = & x + \underbrace{\alpha\langle x, u\rangle}_{\in\mathbb{R}} u \in \mathbb{R}^n, \text{ comme combinaison linéaire de } x, u \in \mathbb{R}^n \text{ et} \\ f_\alpha(x+\lambda y) & = & x + \lambda y + \alpha\langle x+\lambda y, u\rangle u \\ & = & x + \alpha\langle x, u\rangle u + \lambda\left(y + \alpha\langle y, u\rangle u\right) \\ & = & f_\alpha(x) + \lambda f_\alpha(y). \end{array}$$

   Donc $\boxed{f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$.

2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{array}{rcl} f_\alpha \circ f_\beta(x) & = & f_\alpha(x + \beta\langle x, u\rangle u) \\ & = & x + \beta\langle x, u\rangle u + \alpha\langle x + \beta\langle x, u\rangle u, u\rangle u \\ & = & x + \beta\langle x, u\rangle u + \alpha\langle x, u\rangle u + \alpha\beta\langle u, u\rangle\langle x, u\rangle u \\ & = & x + \left(\beta + \alpha + \alpha\beta\|u\|^2\right)\langle x, u\rangle u \\ & = & f_m(x), \text{ avec } m = \beta + \alpha + \alpha\beta\|u\|^2. \end{array}$$

   Donc $\boxed{f_\alpha \circ f_\beta = f_m, \text{ avec } m = \beta + \alpha + \alpha\beta\|u\|^2)}$. Notons que $f_\beta \circ f_\alpha = f_\alpha \circ f_\beta$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f_0(x) = x$. Donc $f_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et, si $m = 0$, on a $f_\beta \circ f_\alpha = f_\alpha \circ f_\beta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. De plus,

$$m = 0 \Longleftrightarrow \beta(1 + \alpha\|u\|^2) = -\alpha \quad \text{et} \quad 1 + \alpha\|u\|^2 \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq -\frac{1}{\|u\|^2}.$$

   Donc, $\boxed{\text{pour tout } \alpha \neq -\frac{1}{\|u\|^2},\ f_\alpha \text{ est bijective, de réciproque } f_\beta, \text{ avec } \beta = -\frac{\alpha}{1+\alpha\|u\|^2}}$.

   Remarque : Si $\alpha = -\dfrac{1}{\|u\|^2}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f_\alpha(x) = x - \dfrac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u$ et

   f_α est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$, de vecteur normal u.

   Dans ce cas, $\mathrm{Ker}(f_\alpha) = \mathrm{Vect}(u)$ est non nul et f_α n'est pas une bijection.

Problème 3 : *BON de Legendre - d'après oral II 2019*

1. Soit le polynôme $P_n = (X^2-1)^n$, dont le terme de plus haut degré est X^{2n} (formule du binôme).

   Sa dérivée $n-$*ième* $P_n^{(n)}$ est donc un polynôme dont le terme de plus haut degré est :

$$(2n)(2n-1)\cdots(2n-n+1)X^{2n-n} = \frac{(2n)!}{n!}X^n.$$

   En multipliant par $\dfrac{n!}{(2n)!}$, $\boxed{L_n \text{ est polynomiale de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $P_n = (X-1)^n(X+1)^n$ a pour racines ± 1, chacune de multiplicité n.

   Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P_n^{(k)}(\pm 1) = 0$.

   Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par intégrations par parties successives, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(t)Q(t)\mathrm{d}t &= \underbrace{[P_n^{(n-1)}(t)Q(t)]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} P_n^{(n-1)}(t)Q'(t)\mathrm{d}t \\
&= -\underbrace{[P_n^{(n-2)}(t)Q'(t)]_{-1}^{1}}_{=0} + (-1)^2 \int_{-1}^{1} P_n^{(n-2)}(t)Q''(t)\mathrm{d}t \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{n-1}\underbrace{[P_n^{(0)}(t)Q^{(n-1)}(t)]_{-1}^{1}}_{=0} + (-1)^n \int_{-1}^{1} P_n^{(0)}(t)\underbrace{Q^{(n)}(t)}_{=0}\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Par linéarité de l'intégrale, $\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\mathrm{d}t = \frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(t)Q(t)\mathrm{d}t = 0}$.

3. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

   D'après les questions précédentes, si $k, p \in [\![0, n]\!]$ avec $k < p$, alors on a :

$$L_p \in \mathbb{R}_p[X],\ L_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X] \quad \text{et} \quad \varphi(L_k, L_p) = \varphi(L_p, L_k) = 0.$$

   Donc $(L_0, \ldots, L_n)$ est une famille orthogonale de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est donc libre de cardinale $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. C'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Par intégrations par parties successives, on a :

$$\begin{aligned}
\|P_k^{(k)}\|^2 &= \int_{-1}^{+1} P_k^{(k)}(t)P_k^{(k)}(t)\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{[P_k^{(k-1)}(t)P_k^{(k)}(t)]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} P_k^{(k-1)}(t)P_k^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t \\
&= \cdots \\
&= (-1)^k \int_{-1}^{+1} P_k^{(0)}(t)P_k^{(2k)}(t)\mathrm{d}t \\
&= (-1)^{2k}(2k)! \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^k \mathrm{d}t \\
&= (2k)! \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k+1}(x)\mathrm{d}x, \text{ en posant } t = \sin(x),\ \mathrm{d}t = \cos(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

   On pose $I_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k}(x)\cos(x)\mathrm{d}x$. Par intégration par parties, pour $k \geq 1$, on a :

$$I_k = \underbrace{\Big[\cos^{2k}(x)\sin(x)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{=0} + 2k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k-1}(x)\underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)}\mathrm{d}x = 2kI_{k-1} - 2kI_k.$$

$$I_k = \frac{2k}{2k+1} I_{k-1} = \frac{(2k)(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)} I_{k-2} = \cdots = \frac{[2^k(k!)]^2}{(2k+1)!} I_0, \text{ avec } I_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x = 2.$$

Donc $\|P_k^{(k)}\|^2 = (2k)! I_k = \dfrac{2[2^k(k!)]^2(2k)!}{(2k+1)!}$ et $\|L_k\| = \dfrac{k!}{(2k)!}\|P_k^{(k)}\| = \dfrac{2^{k+1/2}(k!)^2}{[(2k)!(2k+1)!]^{1/2}}$.

$$\boxed{\frac{L_k}{\|L_k\|} = \frac{P_k^{(k)}}{\|P_k^{(k)}\|} = \frac{(2k+1)^{1/2}}{2^{k+1/2}k!} P_k^{(k)},\ k \in [\![0, n]\!], \text{ forment une BON de } \mathbb{R}_n[X] \text{ pour } \varphi}.$$