Devoir de maison n°8

Problème 1 : *transformée de Fourier d'une fonction particulière - d'après oral II 2019*

Soit $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}a^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, $a > 1$.

1. Montrer que $\widehat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, puis $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer sa dérivée.
2. Montrer que $\widehat{f}$ est solution d'une équation différentielle. En déduire $\widehat{f}(x)$.

Problème 2 : *expliciter une fonction intégrale à paramètre à partir de sa dérivée seconde*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $(x,t) \in [-a,a]\times]0,+\infty[$, on a : $\left|\dfrac{\sin(xt)}{t}\right|\mathrm{e}^{-t} \leq a\mathrm{e}^{-t}$.
3. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
5. En déduire l'expression de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Problème 3 : *solution DSE d'une équation différentielle - d'après oral II 2022*

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n+2}{2(n+1)}u_n$. On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 4$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
3. Exprimer $S'(x)$ en fonction de x et de $S(x)$. En déduire $S(x)$.