Éléments de correction du DM n°8

Problème 1 : *transformée de Fourier d'une fonction particulière - d'après oral II 2019*

1. $a > 1$ et $a^{-t} = e^{-t\ln(a)}$, avec $\ln(a) > 0$. On pose $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t$, avec $g(x,t) = \dfrac{e^{\mathrm{i}tx}a^{-t}}{\sqrt{t}}$.

   - Pour $t \in]0,+\infty[$ fixé : $x \longmapsto g(x,t) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, comme fonction exponentielle.
   - Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $t \longmapsto g(x,t) \in \mathscr{C}^0(]0,+\infty[)$, comme produit de fonctions continues.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0,+\infty[$, on a : $|g(x,t)| = \dfrac{a^{-t}}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$.

   De plus, $\varphi \in \mathscr{C}^0(]0,+\infty[)$, comme produit de fonctions continues.

   $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable en 0^+ car $1/2 < 1$.

   $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, par croissance comparée, et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ car $2 > 1$.

   Donc, par comparaison, φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, $\boxed{\widehat{f} \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}}$.

   - Pour $t \in]0,+\infty[$ fixé : $x \longmapsto g(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, comme fonction exponentielle, et on a :
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}\sqrt{t}e^{\mathrm{i}tx}a^{-t}.$$
   - Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $t \longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après ce qui précède.
   - Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $t \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}^0(]0,+\infty[)$, comme produit de fonctions continues.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0,+\infty[$, on a : $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}a^{-t} = \psi(t)$.

   $\psi \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[)$, comme produit de fonctions continues, et $\psi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, par croissance comparée. Donc, par comparaison, ψ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, $\boxed{\widehat{f} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})}$. De plus, on a :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}\,'(x) = \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{\mathrm{i}tx}a^{-t}\mathrm{d}t}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $u(t) = 2\sqrt{t}$, $v(t) = e^{\mathrm{i}tx}a^{-t} = e^{-t(\ln(a)-\mathrm{i}x)}$.

   $u, v \in \mathscr{C}^1(]0,+\infty[)$, $|u(t)v(t)| = 2\sqrt{t}a^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparée, et $u(0)v(0) = 0$.

   Comme l'intégrale $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ converge, par intégration par parties, on a :

   $$\widehat{f}(x) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = 2(\ln(a)-\mathrm{i}x)\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{\mathrm{i}tx}a^{-t}\mathrm{d}t = -2\mathrm{i}(\ln(a)-\mathrm{i}x)\widehat{f}\,'(x).$$

Donc $\boxed{\widehat{f} \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } (E) :\ y' + \dfrac{1}{2(x+\mathrm{i}\ln(a))}y = 0}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2(x+\mathrm{i}\ln(a))} = \frac{x}{2(x^2+\ln^2(a))} - \frac{\mathrm{i}\ln(a)}{2(x^2+\ln^2(a))}$$

La solution générale de (E) s'écrit $y(x) = Ce^{-\frac{1}{4}\ln(x^2+\ln^2(a))+\frac{\mathrm{i}}{2}\arctan\left(\frac{x}{\ln(a)}\right)}$ et $y(0) = \dfrac{C}{\sqrt{\ln(a)}}$.

En posant $u = \sqrt{t\ln(a)}$, $\mathscr{C}^1$, bijectif, strictement croissant de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, on a :

$$\widehat{f}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\ln(a)}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\ln(a)}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\ln(a)}}, \text{ car } \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\left[x^2+\ln^2(a)\right]^{1/4}}e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\arctan\left(\frac{x}{\ln(a)}\right)}}$.

Problème 2 : *expliciter une fonction intégrale à paramètre à partir de sa dérivée seconde*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$, avec $f(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}$.

   $t \longmapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^0(]0,+\infty[)$, comme produit de fonctions continues.

   $f(x,t) \underset{t\to 0}{=} (x^2+o(1))\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} x^2$. Donc $t \longmapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0.

   Par l'inégalité triangulaire, $\forall t \geq 1$, $|f(x,t)| \leq 2\mathrm{e}^{-t}$. Et $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable en $+\infty$.

   Donc, par comparaison, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\boxed{g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.

2. Soit $a > 0$. Pour tout $(x,t) \in [-a,a]\times]0,+\infty[$, on a : $|\sin(xt)| \leq |xt| \leq a|t|$ et

$$\left|\frac{\sin(xt)}{t}\right|\mathrm{e}^{-t} = \frac{|\sin(xt)|}{|t|}\mathrm{e}^{-t} \leq \frac{a|t|}{|t|}\mathrm{e}^{-t} = a\mathrm{e}^{-t}.$$

3. • Pour $t \in]0,+\infty[$ fixé : $x \longmapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, comme fonction cosinus, et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}.$$

   • Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après la question 1.

   • Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}^0(]0,+\infty[)$, comme produit de fonctions continues.

   • Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a,a]$ et tout $t \in]0,+\infty[$, on a : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq a\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$.

   φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, g est $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[-a,a]$ et

$$\boxed{\forall x \in [-a,a], \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}.$$

   Si $x \in \mathbb{R}$, il existe $a > |x|$ tel que $x \in [-a,a]$. Donc $\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

4. • Pour $t \in]0,+\infty[$ fixé : $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, comme fonction sinus, et on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)\mathrm{e}^{-t}.$$

• Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après ce qui précède.

• Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $t \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \in \mathscr{C}^0(]0,+\infty[)$, comme produit de fonctions continues.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0,+\infty[$, on a : $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-t} = \psi(t)$.

ψ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, g' est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \text{Ré}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-\mathrm{i}x)}\mathrm{d}t\right) = \text{Ré}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}x}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc $\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$.

5. Donc $g'(x) = \arctan(x) + C$, avec $C = g'(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0$. Par intégration par parties, on a :

$$g(x) = x\arctan(x) - \int^x \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t + C = x\arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}) + C,$$

avec $C = g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0$. Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x\arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2})}$.

Problème 3 : *solution DSE d'une équation différentielle - d'après oral II 2022*

1. Soit la propriété $\mathscr{P}_n$: "$1 \leq u_n \leq 4$".

• $u_0 = 1 \in [1,4]$ et $u_1 = 2 \in [1,4]$ donc $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies.

• Si $\mathscr{P}_n$ est vraie à un rang $n \geq 1$, alors on a : $1 \leq u_n \leq 4$ et

$$1 \leq 1 + \underbrace{\frac{n+2}{2(n+1)}}_{\geq 0} \leq u_{n+1} \leq 1 + \frac{4(n+2)}{2(n+1)} = 4 + \frac{2(n+2)}{n+1} - 3 = 4 - \underbrace{\frac{n-1}{n+1}}_{\geq 0} \leq 4,$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 4}$.

2. On en déduit que $R\left(\sum u_n x^n\right) \leq R\left(\sum x^n\right) = 1$ et que $R\left(\sum u_n x^n\right) \geq R\left(\sum 4x^n\right) = 1$.

Donc $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum u_n x^n \text{ est } R = 1}$.

3. La fonction S est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et, par dérivation terme à terme, on a :

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n+\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}nu_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{x}{2}S'(x)+S(x).$$

Donc $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ S'(x)=\dfrac{2}{(1-x)^2(2-x)}+\dfrac{2}{2-x}S(x)}$.

S est donc solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle (E) : $y'+\dfrac{2}{x-2}y=\dfrac{2}{(1-x)^2(2-x)}$.

L'équation homogène associée a pour solution générale $y_H(x)=C\mathrm{e}^{-2\ln(|x-2|)}=\dfrac{C}{(x-2)^2}$.

On cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_P(x)=\dfrac{C(x)}{(x-2)^2}$.

y_P est solution de (E) ssi $C'(x)=\dfrac{2(x-2)^2}{(1-x)^2(2-x)}=\dfrac{2(2-x)}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{2}{(1-x)^2}$.

$C(x)=-2\ln(1-x)+\dfrac{2}{1-x}$ convient et la solution générale de (E) s'écrit :

$$y(x)=y_H(x)+y_P(x)=\frac{1}{(x-2)^2}\left(C-2\ln(1-x)+\frac{2}{1-x}\right)\text{ et }y(0)=\frac{C+2}{4}.$$

$S(0)=u_0=1$ donc $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \ S(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}\left(2-2\ln(1-x)+\dfrac{2}{1-x}\right)}$.