

Devoir de maison n°7

Problème 1 : balade aléatoire dans un train - d'après oral II 2022

Un homme se trouve dans un train de 4 wagons et se balade de wagon en wagon. Lorsqu'il se trouve dans un wagon, il ne peut qu'aller dans celui d'avant ou celui d'après. On note le temps $t = n$, l'instant initial étant $t = 0$, et $p_{k,n}$ la probabilité qu'il soit dans le wagon $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ à l'instant n .

1. Trouver une matrice A telle que $\Pi_{n+1} = A\Pi_n$, avec $\Pi_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \end{pmatrix}$.
2. Exprimer Π_{2n} et Π_{2n+1} en fonction de n . Que peut-on dire lorsque $n \rightarrow +\infty$?

Problème 2 : point selle d'une matrice aléatoire - d'après oral II 2023

Soit $(X_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On dit que $X_{i,j}$ est un point selle de M lorsque :

$$X_{i,j} = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{X_{k,j}\} = \min_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{X_{i,k}\}.$$

1. Quelle est la probabilité que $X_{i,j}$ soit un point selle de M ?
2. Calculer p_n , probabilité qu'au moins une colonne soit nulle. En donner un équivalent.
3. Calculer la probabilité que M admette un point selle.

Problème 3 : loi du n -ième succès - d'après oral II 2017

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

1. Donner la loi de $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
2. Calculer $P(X_i = 1 | S_n = k)$ puis $P(X_i = 1, X_j = 1 | S_n = k)$. Que remarque-t-on ?
3. Soit T_n la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du n -ième succès.
Donner la loi de T_1 , puis celle de T_n , $n \geq 2$. En quoi est-ce différent d'une loi binomiale ?
4. On pose $U_1 = T_1$ et $U_2 = T_2 - T_1$. Montrer que U_1 et U_2 sont indépendantes de même loi.