

Devoir de maison n°6

Problème 1 : diagonalisation et puissances d'une matrice 4×4 à paramètres - d'après oral II 2024

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Sous cette condition, déterminer α_n et β_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ pour que $A^n = \alpha_n I_4 + \beta_n A$.

Problème 2 : réduction en dimension 3 - d'après oral II 2021

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant

$$\det(f) = 0, \quad \text{tr}(f) = 1 \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f).$$

1. Déterminer les dimensions de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
2. Montrer que f est trigonalisable.
3. Déterminer les valeurs propres de f et si f est diagonalisable.
4. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problème 3 : une partie de tennis entre amis - d'après oral II 2017

On résume une partie de tennis de la manière suivante : chaque joueur sert à tour de rôle pour un jeu complet. Le premier joueur qui gagne deux jeux de plus que son adversaire emporte la partie. Chaque joueur gagne le jeu pendant lequel il sert avec une probabilité p . On considère les événements

V_k : « le joueur qui a servi au premier jeu remporte le k ème jeu »,

A_{2n} : « le joueur qui a servi au premier jeu remporte la partie au $2n$ -ième jeu »,

D_{2n} : « les deux joueurs sont à égalité à l'issue du $2n$ -ième jeu ».

1. Exprimer la probabilité $P(A_{2n})$ puis $P(D_{2n})$ en fonction de $P(D_{2n-2})$.
2. En déduire les valeurs de $P(D_{2n})$ et de $P(A_{2n})$.
3. Calculer la probabilité pour que le joueur ayant servi au premier jeu gagne la partie.