Devoir de maison n°5

Problème 1 : *puissances d'une matrice $n \times n$ particulière - d'après oral II 2023*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Problème 2 : *projection d'une droite affine de l'espace - d'après oral II 2023*

On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - 2y + z = 0$ et u le vecteur de coordonnées $(1, 2, 1)$.

1. Écrire la matrice dans la base canonique de la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\Delta = \text{Vect}(u)$.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par les équations $x + y + 2z = 1$ et $2x + y = 1$.
   Déterminer l'image de $\mathcal{D}$ par cette projection.

Problème 3 : *matrice à diagonale strictement dominante - d'après oral II 2019*

$A = (a_{ij})_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante (d.s.d.) si $\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{ii}| > \displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+i \\ 1+i & 9/2 & 3 \\ 1+2i & e & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles d.s.d. ?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ d.s.d.. Montrer que $\det(A) \neq 0$. Qu'en déduit-on ?
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d.s.d. et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ t.q. $AZ = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) On pose $M = \displaystyle\max_{i \in [\![1,n]\!]} |z_i|$. Montrer que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{ii}||z_i| \leq M \displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.
   (b) En déduire que Z est nul. Que peut-on en déduire sur A ?