Éléments de correction du DM n°5

Problème 1 : *puissances d'une matrice $n \times n$ particulière - d'après oral II 2023*

$A = I_n + J_n$, où $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a tous ses coefficients égaux à 1.

$J_n^1 = n^0 J_n$, $J_n^2 = n J_n$ et si $J_n^k = n^{k-1} J_n$ à un rang $k \in \mathbb{N}^*$, alors $J_n^{k+1} = J_n J_n^k = n^{k-1} J_n^2 = n^k J_n$.

Par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J_n^k = n^{k-1} J_n$ et, par la formule du binôme (I_n et J_n commutent), on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^p = (I_n + J_n)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} J_n^k = J_n^0 + \left(\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} n^{k-1} \right) J_n = I_n + \frac{(n+1)^p - 1}{n} J_n,$$

formule encore vraie si $p = 0$ car $A^0 = I_n$. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A(aI_n + bJ_n) = I_n \iff aI_n + bJ_n + aJ_n + bnJ_n = I_n \iff (a-1)I_n + (a+(n+1)b)J_n = 0_n.$$

Donc $A \left(I_n - \frac{1}{n+1} J_n \right) = \left(I_n - \frac{1}{n+1} J_n \right) A = I_n$ et A est inversible d'inverse $A^{-1} = I_n - \frac{1}{n+1} J_n$.

Par la formule du binôme, on a :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^{-p} &= (A^{-1})^p = \left(I_n - \frac{1}{n+1} J_n \right)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \left(\frac{-1}{n+1} J_n \right)^k \\ &= J_n^0 + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} \left(\frac{-n}{n+1} \right)^k \right) J_n = I_n + \frac{(n+1)^{-p} - 1}{n} J_n, \end{aligned}$$

Finalement, $\forall p \in \mathbb{Z}, A^p = I_n + \frac{(n+1)^p - 1}{n} J_n$.

Problème 2 : *projection d'une droite affine de l'espace - d'après oral II 2023*

1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$v \in \mathcal{P} \iff x = 2y - z \iff v = (2y - z, y, z) = \underbrace{y(2, 1, 0)}_{=u_1} + \underbrace{z(-1, 0, 1)}_{=u_2}.$$

Donc $\mathcal{P} = \text{Vect}(u_1, u_2)$. Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u)$ et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\det(P) \neq 0$ donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \Delta$, par le théorème de la base adaptée.

De plus, P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Par l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

1^{ière} méthode : p étant le projecteur sur $\mathcal{P}$ parallèlement à Δ alors $\mathcal{P} = \text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3} - p)$

et $\Delta = \text{Ker}(p)$. Ainsi, la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$ est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par la formule de changement de base, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = PDP^{-1}$. Donc

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi que $p(x, y, z) = \left(\frac{3x - 2y + z}{2}, x - y + z, \frac{x - 2y + 3z}{2} \right)$.

2^{ème} méthode : On calcule les coordonnées d'un vecteur $v = (x, y, z)$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ \frac{x - 2y + 3z}{2} \\ \frac{-x + 2y - z}{2} \end{pmatrix} \text{ donc } u = \underbrace{(x - y + z)u_1 + \frac{x - 2y + 3z}{2}u_2}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{\frac{-x + 2y - z}{2}u_3}_{\in \Delta}.$$

p étant le projecteur sur $\mathcal{P}$ parallèlement à Δ , on a :

$$p(x, y, z) = (x - y + z)u_1 + \frac{x - 2y + 3z}{2}u_2 = \left(\frac{3x - 2y + z}{2}, x - y + z, \frac{x - 2y + 3z}{2} \right).$$

La matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}$ est donc $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Remarque : Si s est la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à Δ alors on a $s = 2p - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Donc la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}$ est $B = 2A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $s(x, y, z) = (2x - 2y + z, 2x - 3y + 2z, x - 2y + 2z)$.

$$2. \mathcal{D} : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 1 - 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Donc $\mathcal{D}$ est la droite passant par le point $\Omega(0, 1, 0)$ de vecteur directeur $w = (2, -4, 1)$.

L'image de $\mathcal{D}$ par la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à Δ est la droite $\mathcal{D}'$ passant par Ω' , image de Ω par cette projection, et dirigée par $w' = p(w)$.

Ainsi, $\mathcal{D}'$ passe par le point $\Omega'(-1, -1, -1)$ et est dirigée par le vecteur $w' = (15/2, 7, 13/2)$.

Problème 3 : matrice à diagonale strictement dominante - d'après oral II 2019

1. A n'est pas d.s.d. car $|a_{33}| = 2 < 3 = |a_{32}| + |a_{31}|$.

B est d.s.d. car $|1| + |1+i| = 1 + \sqrt{2} < 3$, $|1+i| + |3| = 3 + \sqrt{2} < 9/2$ et $|1+2i| + |e| = e + \sqrt{5} < 5$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ d.s.d.. On a : $\det(A) = ad - bc$, avec $|a| > |b|$ et $|d| > |c|$.

Donc $|ad| = |a||d| > |b||c| = |bc|$, $ad \neq bc$ et $\det(A) \neq 0$. On en déduit que A est inversible.

3. (a) $AZ = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{ij}z_j = 0$ et $a_{ii}z_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}z_j$.

$M = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |z_i| \geq 0$ donc, par l'inégalité triangulaire et linéarité de la somme, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| |z_i| = |a_{ii}z_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}z_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \underbrace{|z_j|}_{\leq M} \leq M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| |z_i| \leq M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$.

(b) Supposons, par l'absurde, que $M > 0$. Comme A est d.s.d., on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| |z_i| \leq M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < M |a_{ii}|$$

Si $M = |z_{i_0}|$ alors $|a_{i_0 i_0}| M < M |a_{i_0 i_0}|$: absurde !

Donc $M = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |z_i| = 0$ et Z est nul.

On en déduit que $AZ = 0_{\mathbb{R}^n} \implies Z = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $\text{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et A est inversible.