Devoir de maison n°4

Problème 1 : *développement asymptotique d'une somme de Riemann - d'après oral II 2023*

Pour $g \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(g) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$.

1. Préciser la limite de $S_n(g)$ quand n tend vers $+\infty$. Application à u_n.
2. On suppose que $g \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $t, a \in [0,1]$,
$$\left| g(t) - g(a) - (t-a)g'(a) \right| \leq M\frac{(t-a)^2}{2}.$$
3. En déduire que $\left| \displaystyle\int_0^1 g(t)dt - S_n(g) - \frac{1}{2n}S_n(g') \right| \leq \dfrac{M}{6n^2}$.
indication : remplacer a par $\dfrac{k}{n}$, *intégrer l'inégalité obtenue sur* $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$,
puis sommer les inégalités pour $k = 0, \ldots, n-1$.
4. Déterminer un développement asymptotique de $S_n(g)$. Application à u_n.

Problème 2 : *suite d'intégrales généralisées - d'après oral II 2024*

1. Soit $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Étudier l'existence de $I_{\alpha,n} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^n}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur.
2. Montrer que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{1+t^2}\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 \frac{(\ln(x))^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
3. En déduire que $E_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(x))^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$ est définie et que $E_{2k} \underset{+\infty}{\sim} 2 \cdot (2k)!$.

Problème 3 : *intégrale généralisée à borne variable - d'après oral II 2023*

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$. Établir la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$.
2. Justifier que $\varphi_P : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi_P'(x)$.
3. Soit l'application $f_x : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e_k = X^k$.
   (a) Déterminer $f_x(e_0)$ et donner le lien entre $f_x(e_k)$ et $f_x(e_{k-1})$.
   (b) Montrer que f_x induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.