Éléments de correction du DM n°4

Problème 1 : *développement asymptotique d'une somme de Riemann - d'après oral II 2023*

1. $S_n(g)$ est une somme de Riemann sur l'intervalle $[0,1]$ de la fonction $g \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Donc

$$\boxed{S_n(g) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{1+k/n} = S_n(f)$, avec $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t} \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \ln(2)}.$$

2. Si $g \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ alors g'' est continue sur le **segment** $[0,1]$ et, par le théorème des bornes atteintes,

$$\exists M > 0,\ \forall t \in [0,1],\ |g''(t)| \le M.$$

Ainsi, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :

$$\boxed{\forall t, a \in [0,1],\ \big|g(t) - g(a) - (t-a)g'(a)\big| \le M\frac{(t-a)^2}{2}}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{k}{n} \in [0,1]$ et

$$\forall t \in [0,1],\ \left|g(t) - g\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)g'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{M}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2.$$

Par l'inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale, comme $\dfrac{k+1}{n} \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[g(t) - g\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t-\frac{k}{n}\right)g'\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}t\right| &\le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|g(t) - g\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t-\frac{k}{n}\right)g'\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}t \\ &\le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{M}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

De plus, $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \mathrm{d}t = \frac{1}{n}$, $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2n^2}$ et $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t-\frac{k}{n}\right)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3n^3}$.

Donc, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}g\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}g'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{M}{6n^3}.$$

Par l'inégalité triangulaire et sommation de ces inégalités, on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}g\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}g'\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right| &\le \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}g\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}g'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{6n^3} = \frac{M}{6n^2}.\end{aligned}$$

Par la relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ et, par linéarité de la somme, on a :

$$\boxed{\left|\int_0^1 g(t)dt - S_n(g) - \frac{1}{2n}S_n(g')\right| \leq \frac{M}{6n^2}}.$$

4. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt - S_n(g) - \frac{1}{2n}S_n(g') \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ et, comme g' est continue sur $[0,1]$, on a :

$$S_n(g') \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t + o(1) \text{ donc } \frac{1}{2n}S_n(g') \underset{n\to+\infty}{=} \frac{g(1)-g(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc $\boxed{S_n(g) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t - \frac{g(1)-g(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Si $g = f$, avec $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t} \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, on obtient : $\boxed{u_n = \ln(2) + \dfrac{1}{4n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

Problème 2 : *suite d'intégrales généralisées - d'après oral II 2024*

1. Soit $\alpha > 1$ fixé. $I_{\alpha,0} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ converge (d'après le cours) et $I_{\alpha,0} = \left[\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{+\infty} = \dfrac{1}{\alpha-1}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $f_{\alpha,n} : x \longmapsto \dfrac{(\ln(x))^n}{x^\alpha} \in \mathscr{C}^0([1,+\infty[)$, comme composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

   <u>En $+\infty$</u> : Si $1 < \beta < \alpha$ alors $f_{\alpha,n}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$, par croissance comparée car $\alpha - \beta > 0$.

   $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\beta}$ est intégrable en $+\infty$, car $\beta > 1$, donc $f_{\alpha,n}$ aussi et donc $I_{\alpha,n}$ converge.

   On pose $u(x) = \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ et $v(x) = (\ln(x))^n$.

   $u, v \in \mathscr{C}^1([1,+\infty[)$ et $\forall x \geq 1$, $u'(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ et $v'(x) = \dfrac{n(\ln(x))^{n-1}}{x}$. De plus, on a :

$$u(x)v(x) = \frac{(\ln(x))^n}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   par croissance comparée, car $\alpha - 1 > 0$. Comme $I_{\alpha,n}$ converge, par I.P.P., on a :

$$I_{\alpha,n} = \underbrace{\left[\frac{(\ln(x))^n}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^{+\infty}}_{=0} + \frac{n}{\alpha-1}\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{(\ln(x))^{n-1}}{x^\alpha}\mathrm{d}x}_{=I_{\alpha,n-1}}.$$

   En cascade (ou par récurrence), on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{\alpha,n} = \dfrac{n!}{(\alpha-1)^n}I_{\alpha,0} = \dfrac{n!}{(\alpha-1)^{n+1}}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme pour $I_{\alpha,n}$ avec $\alpha = 2 > 1$, on montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge.

   On pose $t = \dfrac{1}{x}$, $\mathscr{C}^1$, bijectif, strictement **décroissant** de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$ et on a :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{(\ln(1/x))^n}{1+(1/x)^2}\left(-\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right) = (-1)^n\int_0^1 \frac{(\ln(x))^n}{1+x^2}\mathrm{d}x}.$$

3. On en déduit que $E_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(x))^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$ converge en 0 et en $+\infty$ et, par la relation de Chasles,

$$E_n = \int_0^1 \frac{(\ln(x))^n}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^n}{1+x^2}\mathrm{d}x = [(-1)^n+1]\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^n}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

   Donc, par linéarité de l'intégrale en cas de convergence, on a :

$$E_{2k} = 2\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^{2k}}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^{2k}}{x^2}\mathrm{d}x - 2\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^{2k}}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x,$$

   avec $2\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^{2k}}{x^2}\mathrm{d}x = 2I_{2,2k} = 2\cdot(2k)!$.

   De plus, par positivité et croissance de l'intégrale en cas de convergence, on a :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^{2k}}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(x))^{2k}}{x^4}\mathrm{d}x = I_{4,2k} = \frac{(2k)!}{3^{2k+1}} \underset{k\to+\infty}{=} o((2k)!).$$

   Donc $\boxed{E_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} 2\cdot(2k)!}$.

Problème 3 : *intégrale généralisée à borne variable - d'après oral II 2023*

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés. $\psi : t \longmapsto P(t)\mathrm{e}^t \in \mathscr{C}^0(]-\infty, x])$.

   <u>En $+\infty$</u> : $\psi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, par croissance comparée.

   $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est paire et intégrable en $+\infty$, car $2 > 1$, donc intégrable en $-\infty$ (en posant $t = -u$).

   Donc ψ est intégrable en $-\infty$ et donc $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^x P(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ fixé. Par la relation de Chasles, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^x P(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^0 \psi(t)\mathrm{d}t}_{=C \text{ (constante)}} + \int_0^x \psi(t)\mathrm{d}t.$$

   Comme $\psi \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, par le théorème fondamentale du calcul intégral, $\Psi : x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^x P(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ est une primitive de ψ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\Psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Psi'(x) = \psi(x) = P(x)\mathrm{e}^x$.

   Remarque : D'après le cours, $\Psi(x) = Q(x)\mathrm{e}^x$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(Q) = \deg(P)$.

Donc $\boxed{\varphi_P : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$, comme produit de fonctions dérivables.

De plus, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_P'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\Psi(x) + \mathrm{e}^{-x}\psi(x) = -\varphi_P(x) + P(x)}$.

Remarque : φ_P est solution de l'équation différentielle $y' + y = P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. (a) $\boxed{f_x(e_0) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{x} = 1 = e_0}$ et, par I.P.P., on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f_x(e_k) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^k \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\left(\underbrace{\left[t^k\mathrm{e}^{t}\right]_{-\infty}^{x}}_{=x^k\mathrm{e}^{x} \text{ par C.C.}} - k\int_{-\infty}^{x} t^{k-1}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right).$$

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f_x(e_k) = e_k - k f_x(e_{k-1})}$.

Remarque : Ici, on identifie la fonction polynomiale $x \longmapsto x^k$ et le polynôme X^k.

(b) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale en cas de convergence, on a :

$$f_x(P + \lambda Q) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t + \lambda\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} Q(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = f_x(P) + \lambda f_x(Q).$$

Donc f_x est linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après la question 2., $f_x(P) = \mathrm{e}^{-x}Q(x)\mathrm{e}^{x} = Q(x)$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(Q) = \deg(P)$.

Donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f_x(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, $\boxed{f_x \text{ induit un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.