Devoir de maison n°3

Problème 1 : *modèle de la ruine du joueur - d'après oral II 2024*

Une particule se déplace sur une droite ; au départ, elle est à la position $n \in [\![0, N]\!]$. À chaque déplacement son abscisse augmente de 1 avec la probabilité $p \in]0,1[$ ou diminue de 1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Elle s'arrête une fois arrivée en 0 ou en N. On considère les trois événements :

A_n : « la particule s'arrête en 0 », B_n : « la particule s'arrête en N », et C_n : « la particule ne s'arrête jamais ». On note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Donner une relation entre a_n, b_n et c_n. Calculer a_0, a_N, b_0 et b_N.
2. À l'aide de l'événement D : « le premier saut est vers la droite », montrer que
$$\forall n \in [\![1, N-1]\!], a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}.$$
3. En déduire a_n en fonction de n, p, q et N (on traitera séparément le cas où $p = 1/2$).
4. Faire de même pour b_n. Calculer $a_n + b_n$ et c_n.

Problème 2 : *suite récurrente d'ordre* 1 *- d'après oral II 2024*

Soit la suite définie par $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$ et $u_0 > 0$.

1. Convergence et limite de la suite (u_n).
2. Expression de u_n en fonction de $(u_0, \ldots, u_{n-1})$.
3. La série de terme général u_n est-elle convergente ?
4. La série de terme général u_n^2 est-elle convergente ?

Problème 3 : *suite d'intégrales sur un segment - d'après oral II 2023*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^n} \mathrm{d}x$.

1. Calculer u_1. Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente.
2. Montrer que $\forall y \in [0,1],\ 1 + y \leq \mathrm{e}^y \leq 1 + (\mathrm{e} - 1)y$. En déduire $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum (u_n - \ell)^\alpha$ est-elle convergente ?