

Éléments de correction du DM n°3

Problème 1 : *modèle de la ruine du joueur - d'après oral II 2024*

1. (A_n, B_n, C_n) étant un système complet d'événements on a :

$$a_n + b_n + c_n = P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1.$$

Si la particule est à la position 0 au départ, elle s'arrête en 0 avec la probabilité $a_0 = P(A_0) = 1$ et en N avec la probabilité $b_0 = P(B_0) = 0$.

Si elle est à la position N au départ, elle s'arrête en 0 avec la probabilité $a_N = P(A_N) = 0$ et en N avec la probabilité $b_N = P(B_N) = 1$.

2. $(D, \overline{D})$ étant un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad a_n = P(D)P(A_n|D) + P(\overline{D})P(A_n|\overline{D}).$$

Si la particule est à la position n au départ et que le premier saut est vers la droite alors elle est à la position $n+1$. Donc $P(A_n|D) = a_{n+1}$ et, de même, $P(A_n|\overline{D}) = a_{n-1}$. Ainsi,

$$\forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}.$$

3. (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants, d'équation caractéristique $pr^2 - r + q = 0$, de discriminant $\Delta = 1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = (2p-1)^2 \geq 0$.

- Si $p = \frac{1}{2}$: $a_n = (An + B) \times 1^n$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_N = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 1 \\ A = -\frac{1}{N} \end{cases}.$$

Dans ce cas, $\forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, a_n = \frac{N-n}{N}$.

- Si $p \neq \frac{1}{2}$: $a_n = A \times 1^n + B \times \left(\frac{q}{p}\right)^n$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_N = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 1 \\ A + B\left(\frac{q}{p}\right)^N = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \\ A = -\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \end{cases}.$$

Dans ce cas, $\forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, a_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$.

4. De même, $\forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, b_n = pb_{n+1} + qb_{n-1}$ et on trouve :

- si $p = \frac{1}{2}$: $\forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, b_n = \frac{n}{N}, a_n + b_n = 1$ et $c_n = 1 - (a_n + b_n) = 0$;

- si $p \neq \frac{1}{2}$: $\forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, b_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, a_n + b_n = 1$ et $c_n = 1 - (a_n + b_n) = 0$.

Problème 2 : suite récurrente d'ordre 1 - d'après oral II 2024

1. $u_0 > 0$ et si $u_n > 0$ à un rang $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1) \leq 0$.

Donc (u_n) est décroissante minorée par 0.

Par le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.

Par continuité de l'exponentielle, on a : $\ell = \ell e^{-\ell} \iff \ell = 0$ ou $e^{-\ell} = 1 \iff \ell = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. En cascade, $u_n = u_{n-1} e^{-u_{n-1}} = u_{n-2} e^{-u_{n-1} - u_{n-2}} = \dots = u_0 e^{-u_{n-1} - u_{n-2} - \dots - u_0}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 e^{-\sum_{k=0}^{n-1} u_k}$.

3. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ln\left(\frac{u_0}{u_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, car $u_0 > 0$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$.

Donc la série de terme général u_n diverge.

4. $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1) \sim -u_n^2 < 0$. Donc $\sum u_n^2$ est de même nature que $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

La suite (u_n) converge donc la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Donc $\sum u_n^2$ converge.

Problème 3 : suite d'intégrales sur un segment - d'après oral II 2023

1. $u_1 = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1$ donc $u_1 = e - 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour $x \in [0, 1]$, $x^n \geq x^{n+1}$ donc $e^{x^n} \geq e^{x^{n+1}} > 0$, par croissance de l'exponentielle.

Par positivité et croissance de l'intégrale sur un segment, $u_n \geq u_{n+1} \geq 0$. Donc

(u_n) est décroissante, minorée par 0 et convergente, par le théorème de la limite monotone.

2. $f : x \mapsto e^x - 1 - (e - 1)x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - e + 1 > 0 \iff e^x > e - 1 \iff x > \ln(e - 1),$$

avec $\ln(e - 1) \in]0, 1[$ car $1 < e - 1 < e$.

Donc f est décroissante sur $[0, \ln(e - 1)]$ et croissante sur $[\ln(e - 1), 1]$.

De plus, $f(0) = f(1) = 0$ est le maximum de f sur $[0, 1]$.

Donc $\forall x \in [0, 1], e^x - 1 - (e - 1)x \leq 0$ et $e^x \leq 1 + (e - 1)x$.

Donc $\forall y \in [0, 1], 1 + y \leq e^y \leq 1 + (e - 1)y$. L'inégalité de gauche est à savoir.

Ainsi, $\forall x \in [0, 1], x^n \in [0, 1]$ donc $1 + x^n \leq e^{x^n} \leq 1 + (e - 1)x^n$. Par croissance de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 (1 + x^n) dx \leq u_n \leq \int_0^1 [1 + (e - 1)x^n] dx, \text{ donc } 1 + \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1 + \frac{e-1}{n+1}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, par encadrement.

3. D'après ce qui précède $\ell = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq u_n - 1 \leq \frac{e-1}{n+1}$.

- Si $\alpha \leq 0$: la suite $((u_n - 1)^\alpha)$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum (u_n - 1)^\alpha$ diverge.
- Si $\alpha > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq (u_n - 1)^\alpha \leq \frac{(e-1)^\alpha}{(n+1)^\alpha}$ et $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha} > 0$.

Par comparaison de séries à termes positifs et le critère de convergence des séries de Riemann,

la série $\sum (u_n - 1)^\alpha$ converge ssi $\alpha > 1$.