

# Devoir de maison n°2

**Problème 1 :** étude d'une courbe paramétrée - d'après Mines-Télécom 2024

Après avoir fait une étude complète, tracer la courbe paramétrée suivante :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2t + \frac{1}{t^2} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} + 1 \end{cases} .$$

**Problème 2 :** intersection des tangentes avec l'axe des abscisses - d'après oral II 2023

Soit  $\Gamma$  la courbe paramétrée par :  $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} .$

1. Déterminer le domaine de définition de  $\Gamma$ .
2. Étudier les points stationnaires de  $\Gamma$ .
3. Étudier les branches infinies de  $\Gamma$ .
4. Tracer la courbe  $\Gamma$  à l'aide de tableaux de variations.
5. La tangente en un point régulier  $M(t)$  coupe  $(Ox)$  en  $P(t)$ . Déterminer ses coordonnées.

**Problème 3 :** cercles tangents à une parabole et passant par son foyer - d'après oral II 2021

Soit  $\mathcal{P}$  la parabole d'équation  $y^2 = 2px$ . On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble des centres des cercles tangents à  $\mathcal{P}$  et passant par le point  $F(p/2, 0)$ . Soit  $A(a, b)$  un point de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{N}$  la normale en ce point. On note  $I$  le centre du cercle passant par  $F$  et tangent à  $\mathcal{P}$  en  $A$ .

1. Montrer que tout point de  $\mathcal{N}$  a des coordonnées de la forme  $(a - \lambda p, b(1 + \lambda))$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. Déterminer les coordonnées de  $I$ .
3. Étudier la courbe paramétrée, lieu des points  $I$ , dans le cas où  $p = 1$ .