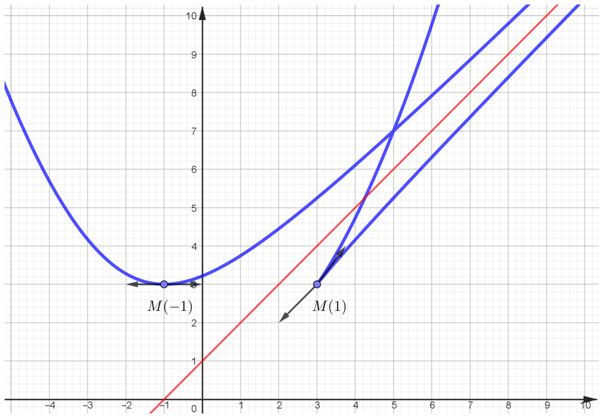
Éléments de correction du DM n°2

Problème 1 : *étude d'une courbe paramétrée - d'après Mines-Télécom 2024*

• x et y sont définies et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, comme sommes de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ x'(t) = 2 - \frac{2}{t^3} = \frac{2(t^3-1)}{t^3} \text{ et } y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = \frac{2(t^4-1)}{t^3}.$$



t	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$x'(t)$			$+$		‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	↗	-1	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	↘	3	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

• Γ admet une tangente horizontale au point $M(-1)$ de coordonnées $(-1, 3)$.

• Γ admet pour unique point stationnaire $M(1)$ de coordonnées $(3, 3)$.

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \begin{pmatrix} 6/t^4 \\ 2 + 6/t^4 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\mathrm{d}^3\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^3}(t) = \begin{pmatrix} -24/t^5 \\ -24/t^5 \end{pmatrix}$$

donc, d'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$\overrightarrow{M(1)M(t)} \underset{t\to 1}{=} (t-1)^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (t-1)^3 \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \underbrace{\vec{o}((t-1)^3)}_{\text{négligeable}},$$

avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ qui dirige la tangente à Γ en $M(1)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{u}$, $(t-1)^2 \geq 0$ et $(t-1)^3$ qui change de signe en 1. Donc $M(1)$ est un point de rebroussement de $1^{\text{ière}}$ espèce.

• $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{t^2}{2t} = \dfrac{t}{2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$. Donc Γ admet une branche parabolique verticale en $\pm\infty$.

• $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{0^\pm}{\sim} \dfrac{1/t^2}{1/t^2} = 1 \underset{t\to 0^\pm}{\longrightarrow} 1$ et $y(t) - x(t) = t^2 - 2t + 1 \underset{t\to 0^\pm}{\longrightarrow} 1$.

Donc Γ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ lorsque $t \longrightarrow 0^\pm$.

De plus, $y(t) - x(t) - 1 = t^2 - 2t \underset{0^\pm}{\sim} -2t$, positif en 0^- et négatif en 0^+.

Donc Γ est au-dessus de $\mathscr{D}$ lorsque $t \longrightarrow 0^-$ et en-dessous lorsque $t \longrightarrow 0^+$.

Problème 2 : *intersection des tangentes avec l'axe des abscisses - d'après oral II 2023*

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. $\tan\left(\dfrac{t}{2}\right) > 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \dfrac{t}{2} \in \left]0 + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ t \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

   Donc $\boxed{\text{le domaine de définition de } \Gamma \text{ est } \mathscr{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[}$.

Remarque : Pour $t \in \mathscr{D}$, $t+2\pi \in \mathscr{D}$ et on a :

$x(t+2\pi) = \cos(t+2\pi) + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\pi\right)\right) = x(t),\ y(t+2\pi) = y(t)$ et donc $M(t+2\pi) = M(t)$.

On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle $I =]0,\pi[$ et la courbe sera complète.

2. y est $\mathscr{C}^\infty$ sur I et x aussi, comme composée et somme de fonctions $\mathscr{C}^\infty$. Pour $t \in I$, on a :

$$x'(t) = -\sin(t) + \frac{\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} = -\sin(t) + \frac{1}{\sin(t)} = \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)},\ y'(t) = \cos(t)$$

et $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{0} \iff \cos(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$ (car $t \in I$).

Donc $\boxed{M\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ est l'unique point stationnaire de } \Gamma}$ (sur I). De plus, pour $t \in I$, on a :

$$x''(t) = -\cos(t) - \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)},\ y''(t) = -\sin(t),$$

$$x^{(3)}(t) = \sin(t) - \frac{-\sin^3(t) - 2\cos^2(t)\sin(t)}{\sin^4(t)},\ y^{(3)}(t) = -\cos(t).$$

Donc, d'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$\overrightarrow{M\left(\frac{\pi}{2}\right)M(t)} \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{=} \frac{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \frac{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \underbrace{\vec{o}\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)}_{\text{négligeable}}.$$

$\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ dirige la tangente à Γ en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$, $\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \geq 0$ et $\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3$ change de signe en $\frac{\pi}{2}$. Donc $\boxed{M\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ est un point de rebroussement de } 1^{\text{ière}} \text{ espèce}}$.

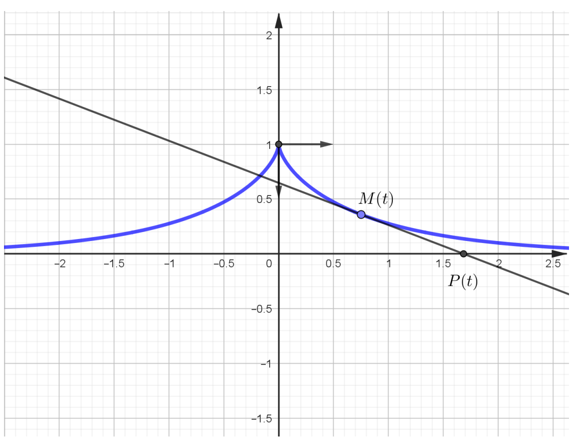
3. • $x(t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$, par composition et opérations sur les limites et $y(t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\boxed{\Gamma \text{ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation } y = 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow 0^+}$.

• $x(t) \underset{t\to\pi^-}{\longrightarrow} +\infty$, par composition et opérations sur les limites et $y(t) \underset{t\to\pi^-}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\boxed{\Gamma \text{ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation } y = 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow \pi^-}$.

4. De ce qui précède, on déduit le tableau de variation et la courbe :



t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$+$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

5. Soit T_t la tangente à Γ en $M(t)$ régulier. On note $P(t)$ le point d'intersection de la droite T_t avec l'axe (Ox) et $(x,0)$ ses coordonnées. Comme T_t est dirigée par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$, on a :

$$\left[\overrightarrow{M(t)P(t)}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right] = 0 \iff \begin{vmatrix} x-\cos(t)-\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) & \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff x\cos(t) = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\cos(t).$$

Comme $M(t)$ est régulier, $\cos(t) \neq 0$ et donc $\boxed{P(t) \text{ a pour coordonnées } \left(\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right), 0\right)}$.

Problème 3 : *cercles tangents à une parabole et passant par son foyer - d'après oral II 2021*

1. $\mathcal{P}$ est paramétrée par $\begin{cases} x(t) &= \frac{t^2}{2p} \\ y(t) &= t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. On note $M(t)$ son point de paramètre t.

Les fonctions x et y sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} t/p \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

Donc $\mathcal{P}$ admet une tangente en son point $A(a,b) = M(b)$ dirigée par $\vec{u} = p\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(b) = \begin{pmatrix} b \\ p \end{pmatrix}$ et une normale $\mathcal{N}$ dirigée par $\vec{n} = \begin{pmatrix} -p \\ b \end{pmatrix} \perp \vec{u}$.

Donc $\boxed{\mathcal{N} \text{ est paramétrée par } \begin{cases} x &= a-\lambda p \\ y &= b+\lambda b \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto (a-\lambda, b(1+\lambda))}$.

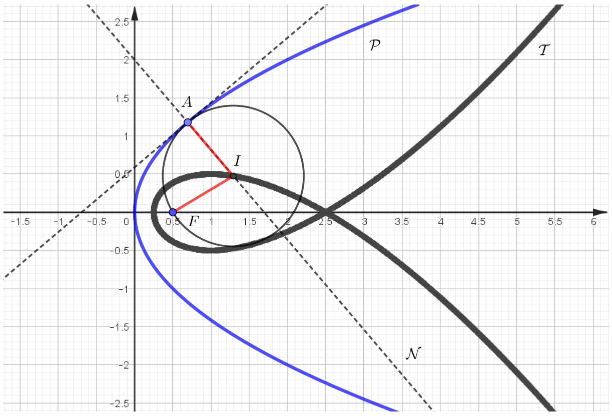
2. Le centre du cercle passant par F et tangent à $\mathcal{P}$ en A est sur la normale $\mathcal{N}$ à $\mathcal{P}$ en A et équidistant de A et de F (cf. figure ci-dessous). Soit $I(a-\lambda, b(1+\lambda)) \in \mathcal{N}$. On a :

$$\begin{aligned} IA = IF \quad &\iff \lambda^2p^2 + \lambda^2b^2 = \left(a - \lambda p - \frac{p}{2}\right)^2 + b^2(1+\lambda)^2 \\ &\iff \cancel{\lambda^2p^2} + \cancel{\lambda^2b^2} = a^2 \underline{-2a\lambda p} + \cancel{\lambda^2p^2} - ap + \underline{\lambda p^2} + \frac{p^2}{4} + b^2 + \underline{2\lambda b^2} + \cancel{\lambda^2b^2} \\ &\underset{b^2=2ap}{\iff} \lambda(b^2+p^2) = -\left(a+\frac{p}{2}\right)^2 = -\left(\frac{b^2+p^2}{2p}\right)^2 \\ &\iff \lambda = -\frac{b^2+p^2}{4p^2} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les coordonnées de } I \text{ sont } \left(\frac{3b^2+p^2}{4p}, \frac{3p^2b-b^3}{4p^2}\right)}$.

3. Si $p=1$, le lieu des points I est donc la courbe paramétrée $\mathcal{T} : \begin{cases} x(t) &= \frac{3t^2+1}{4} \\ y(t) &= \frac{3t-t^3}{4} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

x étant paire et y impaire, on peut restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$ et compléter la courbe par symétrie orthogonale d'axe (Ox). $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = \dfrac{3t}{2}$ et $y'(t) = \dfrac{3(1-t^2)}{4}$. D'où



t	0		1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x'(t)$	0		$+$		
$x(t)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	0 $\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

- $y(t) = 0 \Longleftrightarrow t(3 - t^2) = 0 \Longleftrightarrow t = 0$ ou $t = \pm\sqrt{3}$.

La courbe $\mathcal{T}$ coupe l'axe (Ox) en $M(\sqrt{3}) = (5/2, 0)$ et en $M(0) = (1/4, 0)$, avec une tangente verticale en $M(0)$.

- En $+\infty$, $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t}{3} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Donc $\mathcal{T}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$ et en $-\infty$ par symétrie.