Devoir de maison n°11

Problème 1 : *droite de régression linéaire - d'après oral II 2024*

X, Y sont des v.a. réelles discrètes dont le carré est d'espérance finie.

On pose $A = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(X^2) & \mathrm{E}(X) \\ \mathrm{E}(X) & 1 \end{pmatrix}$ et $f(a,b) = \mathrm{E}\left[(Y - aX - b)^2\right]$.

1. À quelle condition A est-elle inversible ? Pour la suite, on suppose que c'est le cas.
2. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Déterminer le signe de ses valeurs propres.
3. Montrer que $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et que ses points critiques vérifient $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B$, avec B à déterminer.
4. En déduire l'ensemble des points critiques de f, puis étudier leur nature.

Problème 2 : *une conique enveloppe d'une famille de droites - d'après oral II 2023*

On considère les points $A(0,1)$, $B(1,0)$, $M(0, y_M)$ et $N(x_N, 0)$, de sorte que $2y_M - 2 = -x_N$.

1. Donner une équation de la droite (MN) en fonction d'un seul paramètre réel.
2. Déterminer une équation de l'enveloppe $\mathscr{C}$ des droites (MN).
3. Préciser la nature de $\mathscr{C}$ et ses éléments géométriques.

Problème 3 : *sections planes d'une surface - d'après oral II 2023*

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathscr{P} : x + y + z = 1$, la surface $\mathscr{S} : x^2 - y^2 = 2z$ et la courbe $\mathscr{C} = \mathscr{P} \cap \mathscr{S}$.

1. Montrer que la projection orthogonale de $\mathscr{C}$ sur (xOy) est une hyperbole et la tracer.
2. En déduire une représentation paramétrique de $\mathscr{C}$.
3. Trouver le plan parallèle à $\mathscr{P}$ dont l'intersection avec $\mathscr{S}$ est la réunion de deux droites.
4. Donner une représentation paramétrique de ces deux droites et étudier leur position relative.