Éléments de correction du DM n°11

Problème 1 : *droite de régression linéaire - d'après oral II 2024*

1. $\det(A) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}([X - \mathrm{E}(X)]^2)$, avec $[X - \mathrm{E}(X)]^2 \geq 0$. Donc
$$\det(A) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{P}([X - \mathrm{E}(X)]^2 = 0) = 1 \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(X = m) = 1 \text{ (loi certaine)}.$$
Donc $\boxed{A \text{ est inversible si, et seulement si, } X \text{ ne suit pas une loi certaine}}$.

2. A est symétrique réelle, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}}$, d'après le théorème spectral.
Notons λ_1 et λ_2 ses valeurs propres. Si A est inversible, on a :
$\det(A) = \lambda_1\lambda_2 = \mathrm{V}(X) > 0$, donc λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe.
$X^2 \geq 0$ donc $\mathrm{E}(X^2) \geq 0$, par positivité de l'espérance. Ainsi, $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{E}(X^2) + 1 > 0$.
Finalement, $\boxed{\text{les valeurs propres de } A,\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2, \text{ sont strictement positives}}$.

3. Par linéarité de l'espérance, en développant, on obtient :
$$f(a, b) = \mathrm{E}(Y^2) - 2a\mathrm{E}(YX) + a^2\mathrm{E}(X^2) - 2b\mathrm{E}(Y) + 2ab\mathrm{E}(X) + b^2.$$
Donc $\boxed{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2), \text{ comme fonction polynomiale}}$. De plus, $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ si, et seulement si,
$$\begin{cases} -2\mathrm{E}(YX) + 2a\mathrm{E}(X^2) + 2b\mathrm{E}(X) & = & 0 \\ -2\mathrm{E}(Y) + 2a\mathrm{E}(X) + 2b & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a\mathrm{E}(X^2) + b\mathrm{E}(X) & = & \mathrm{E}(YX) \\ a\mathrm{E}(X) + b & = & \mathrm{E}(Y) \end{cases}.$$
Donc $\boxed{\text{les points critiques de } f \text{ vérifient } A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B, \text{ avec } B = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(YX) \\ \mathrm{E}(Y) \end{pmatrix}}$.

4. Donc, si A est inversible, $\boxed{f \text{ admet un unique point critique}}$, qui est
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\mathrm{V}(X)} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{E}(X) \\ -\mathrm{E}(X) & \mathrm{E}(X^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}(YX) \\ \mathrm{E}(Y) \end{pmatrix},$$
$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{V}(X)} \begin{pmatrix} \mathrm{E}(YX) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\ \mathrm{E}(Y)\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(YX) \end{pmatrix}}.$$
De plus, $Hf(a, b) = 2A$, avec $\det(2A) = 2^2 \det(A) > 0$ et $\mathrm{tr}(2\mathrm{A}) = 2\mathrm{tr}(A) > 0$.
Donc $\boxed{f \text{ admet un minimum local en ce point}}$.
Remarque : f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert donc, si f admet un extremum local, alors c'est en un point critique. Donc $\boxed{f \text{ admet un unique extremum local et c'est un minimum}}$.

Problème 2 : *une conique enveloppe d'une famille de droites - d'après oral II 2023*

1. On pose $y_M = t$. Ainsi, on a : $x_N = 2 - 2t$ et

$$K(x,y) \in (MN) \iff \left[\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MN}\right] = 0 \iff \begin{vmatrix} x & 2-2t \\ y-t & -t \end{vmatrix} \iff -tx + (2t-2)y = t(2t-2).$$

Donc, $\boxed{\text{la droite } (MN) \text{ a pour équation } -tx + (2t-2)y = t(2t-2), \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$.

2. Soit $\mathcal{D}_t = (MN)$, passant par $M(t) = M(0,t)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(t) = \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 2-2t \\ -t \end{pmatrix}$.

$t \longmapsto M(t)$ et $t \longmapsto \vec{u}(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\left[\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right] = \begin{vmatrix} -2 & 2-2t \\ -1 & -t \end{vmatrix} = 2t + 2 - 2t = 2 \neq 0.$$

Donc $(\mathcal{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ admet bien une enveloppe $\mathscr{C}$, ensemble des points K vérifiant :

$$\exists t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{ll} K \in \mathcal{D}_t & \textbf{(a)} \\ \mathcal{D}_t \text{ est tangente à } \mathscr{C} \text{ en } K & \textbf{(b)} \end{array} \right. .$$

(a) s'écrit $K = M(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$, avec $t \longmapsto \lambda(t) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OK}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) + \lambda\,'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}\,'(t).$$

(b) s'écrit, si K est régulier : $\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OK}}{\mathrm{d}t}(t), \vec{u}(t)\right] = 0$ et, par bilinéarité et antisymétrique,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OK}}{\mathrm{d}t}(t), \vec{u}(t)\right] = 0 \quad &\iff \quad \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t), \vec{u}(t)\right] + \lambda(t)\left[\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right] = 0 \\ &\iff \quad \lambda(t) = -\frac{\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t), \vec{u}(t)\right]}{\left[\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right]} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2-2t \\ 1 & -t \end{vmatrix} = 1 - t. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ est paramétrée par $K = M(t) + (1-t)\vec{u}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, et $\boxed{\mathscr{C} : \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 2(1-t)^2 \\ y &=& t^2 \end{array} \right., t \in \mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 2 - 4t + 2t^2 \\ y &=& t^2 \end{array} \right. \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 4t &=& 2 - x + 2y \\ 16y &=& (2 - x + 2y)^2 \end{array} \right. \\ &\iff \quad 16y = 4 - 4x + x^2 + 4y^2 + 8y - 4xy. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathscr{C} \text{ a pour équation cartésienne } x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x - 8y + 4 = 0}$.

3. On reconnaît l'équation d'une conique, dont la matrice associée à la partie quadratique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $\det(A) = 0$ donc $\boxed{\mathscr{C} \text{ est une parabole, éventuellement dégénérée}}$.

A est **symétrique réelle** donc diagonalisable en base orthonormée, d'après le théorème spectral.

A a pour valeurs propres 0 et $\operatorname{tr}(A) - 0 = 5$ (on peut aussi calculer le polynôme caractéristique).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y &=& 0 \\ -2x + 4y &=& 0 \end{array} \right. \iff x - 2y = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$E_0(A) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1)$, avec $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ unitaire et $E_5(A) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_2)$, avec $\vec{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \perp \vec{u}_1$.

Ainsi, $A = PDP^T$, avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in SO(2)$, car $\det(P) = +1$.

On pose $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. L'équation de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{R}' = (O; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ s'écrit :

$$0x'^2 + 5y'^2 - 4\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right) - 8\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right) + 4 = 0 \iff 5\left(y' - \frac{6}{5\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{\sqrt{5}}x' - 4 + \frac{36}{25}$$
$$\iff 5\left(y' - \frac{6}{5\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{\sqrt{5}}\left(x' - \frac{4\sqrt{5}}{25}\right).$$

On pose $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - \frac{4\sqrt{5}}{25} \\ y' - \frac{6}{5\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ et $\Omega\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{25}, \dfrac{6}{5\sqrt{5}}\right)$ dans $\mathscr{R}'$.

Ainsi, dans le repère orthonormé direct $\mathscr{R}'' = (\Omega; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$, la parabole $\mathscr{C}$ a pour équation :

$$\boxed{\mathscr{C} : Y^2 = \frac{16}{5\sqrt{5}}X \text{ est une parabole de sommet } \Omega\text{, d'axe de symétrie } \Delta = \Omega + \mathrm{Vect}(\vec{u}_1)}.$$

Remarque : Dans le repère $\mathscr{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, Ω a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{25}, \dfrac{16}{25}\right)$.

Problème 3 : *sections planes d'une surface - d'après oral II 2023*

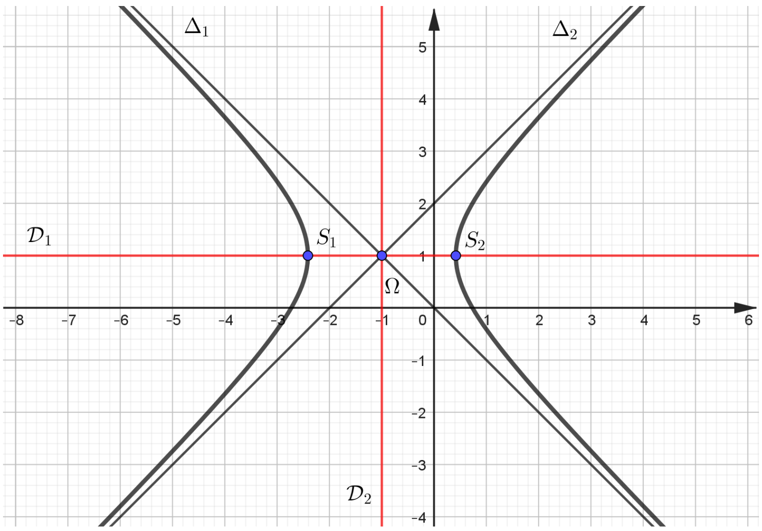
1. $M(x,y,z) \in \mathscr{C} = \mathscr{P} \cap \mathscr{S} \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2-y^2=2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1-x-y \\ x^2-y^2+2x+2y=2 \end{cases}$.

   Donc la projection orthogonale de $\mathscr{C}$ sur (xOy) est l'ensemble $\mathscr{C}'$ des points $N(x,y,0)$ vérifiant :

   $$x^2-y^2+2x+2y = 2 \iff (x+1)^2 - (y-1)^2 = 2 \iff \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{(y-1)^2}{\sqrt{2}^2} = 1.$$

   Donc $\boxed{\text{la projection orthogonale de } \mathscr{C} \text{ sur } (xOy) \text{ est une hyperbole } \mathscr{C}'}$ de centre $\Omega(-1,1,0)$ et d'axes de symétrie $\mathcal{D}_1 = \Omega + \mathrm{Vect}(\vec{i})$ et $\mathcal{D}_2 = \Omega + \mathrm{Vect}(\vec{j})$.

   Si on pose $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y-1 \end{cases}$, dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}$ a pour équation réduite $\dfrac{X^2}{\sqrt{2}^2} - \dfrac{Y^2}{\sqrt{2}^2} = 1$, pour sommets $S_1(-\sqrt{2}, 0)$ et $S_2(\sqrt{2}, 0)$ et pour asymptotes $\Delta_1 : Y = -X$ et $\Delta_2 : Y = X$.



Remarque : dans $(O;\vec{i},\vec{j})$, S_1 a pour coordonnées $(-1-\sqrt{2},1)$, $S_2(-1+\sqrt{2},1)$, Δ_1 a pour équation $y-1=-(x+1)$ et $\Delta_2 : y-1=x+1$.

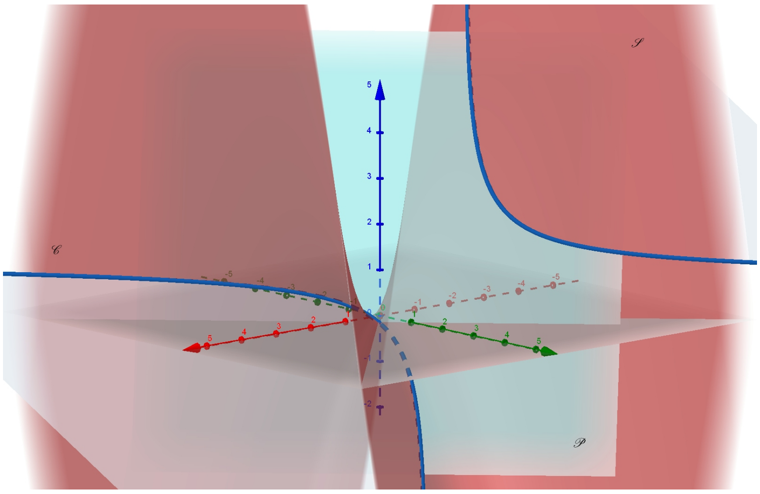
2. Partant d'un paramétrage de $\mathscr{C}'$ dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$, on en obtient un dans $(O;\vec{i},\vec{j})$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} X & = & \pm\sqrt{2}\mathrm{ch}\,(t) \\ Y & = & \sqrt{2}\mathrm{sh}\,(t) \end{array}\right., t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1\pm\sqrt{2}\mathrm{ch}\,(t) \\ y & = & 1+\sqrt{2}\mathrm{sh}\,(t) \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

$\mathscr{C}'$ ayant pour équation cartésienne $x^2-y^2+2x+2y=2$ dans $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a :

$$M(x,y,z)\in\mathscr{C} \iff \left\{\begin{array}{l} z=1-x-y \\ x^2-y^2+2x+2y=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1\pm\sqrt{2}\mathrm{ch}\,(t) \\ y & = & 1+\sqrt{2}\mathrm{sh}\,(t) \\ z & = & 1-x-y \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

D'où un paramétrage de $\mathscr{C}$ dans $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1\pm\sqrt{2}\mathrm{ch}\,(t) \\ y & = & 1+\sqrt{2}\mathrm{sh}\,(t) \\ z & = & 1\mp\sqrt{2}\mathrm{ch}\,(t)-\sqrt{2}\mathrm{sh}\,(t) \end{array}\right., t\in\mathbb{R}}$.



Remarque : On peut construire un repère $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ orthonormé direct adapté à $\mathscr{P}$, obtenir une équation de l'hyperbole $\mathscr{C}$ dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v})$ de $\mathscr{P}$, la réduire puis construire $\mathscr{C}$.

3. Un plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ admet les mêmes vecteurs normaux que $\mathscr{P}$ et donc une équation cartésienne de la forme : $x+y+z=k$, avec $k\in\mathbb{R}$. Donc $M(x,y,z)\in\mathscr{P}'\cap\mathscr{S}$ ssi

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=k \\ x^2-y^2=2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=k-(x+y) \\ (x-y)(x+y)=2k-2(x+y) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=k-x-y \\ (x-y+2)(x+y)=2k \end{array}\right. .$$

• Si $k=0$, on obtient :

$$\boxed{M(x,y,z)\in\mathscr{P}'\cap\mathscr{S} \iff M\in\mathscr{D}_1 : \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-y+2=0 \end{array}\right. \text{ ou } M\in\mathscr{D}_2 : \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y=0 \end{array}\right.},$$

qui est bien la réunion de deux droites de l'espace.

• Si $k>0$, on peut faire le même travail qu'à la question 1., en remplaçant $\sqrt{2}$ par $\sqrt{2k}$ et démontrer que la projection sur (xOy) est une hyperbole propre (non dégénérée) et donc que l'intersection du plan $\mathscr{P}'$ avec $\mathscr{S}$ est une hyperbole propre (non dégénérée).

• Idem si $k<0$ en échangeant le rôle de x et y et en en remplaçant $\sqrt{2}$ par $\sqrt{-2k}$.

4. Si $k = 0$ l'intersection de $\mathscr{S}$ avec $\mathscr{P}' : x + y + z = 0$ est donc la réunion des deux droites

$$\boxed{\mathscr{D}_1 : \left\{\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{array}\right. , \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 \left\{\begin{array}{l} x = -\mu \\ y = \mu \\ z = 0 \end{array}\right. , \mu \in \mathbb{R}}.$$

Ces deux droites étant coplanaires (dans le plan $\mathscr{P}'$), elles sont parallèles ou sécantes.

Soit $A(-\mu, \mu, 0) \in \mathscr{D}_2$. Le point A appartient à $\mathscr{D}_2$ ssi il vérifie ses équations cartésiennes :

$$A \in \mathscr{D}_1 \iff \left\{\begin{array}{l} -\mu + \mu + 0 = 0 \\ -\mu - \mu + 2 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 0 = 0 \\ \mu = 1 \end{array}\right. .$$

On trouve donc qu'$\boxed{\text{elles sont sécantes en } A(-1, 1, 0)}$.

Remarque : $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont dirigées par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respectivement. De plus,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles.