Devoir de maison n°10

Problème 1 : *autour de la matrice Attila - d'après oral II 2024*

Soit $J_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Montrer qu'il existe P_n inversible telle que $J_n = P_n D_n P_n^T$, où $D_n = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver P_2 et P_3 qui conviennent.
3. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec J_n.

Problème 2 : *une caractérisation des projecteurs orthogonaux - d'après oral II 2024*

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice M dans une BON vérifie : $M = M^T M$.

1. Montrer que M est symétrique réelle et que f est un projecteur orthogonal de E.
2. Étudier la réciproque : si f est un projecteur orthogonal de E, sa matrice M dans une BON vérifie-t-elle $M = M^T M$?

Problème 3 : *deux piles consécutifs - d'après Mines-Télécom 2024*

On lance une pièce non équilibrée qui donne pile avec la probabilité 2/3 et face avec la probabilité 1/3. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers jusqu'à avoir 2 piles consécutifs. On note $\mathrm{P}(X = n) = p_n$ pour $n \geq 1$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$ et $(X = 4)$, puis calculer p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que $\forall n \geq 3$, $p_n = \dfrac{1}{3} p_{n-1} + \dfrac{2}{9} p_{n-2}$.
3. En déduire la loi de X et son espérance.