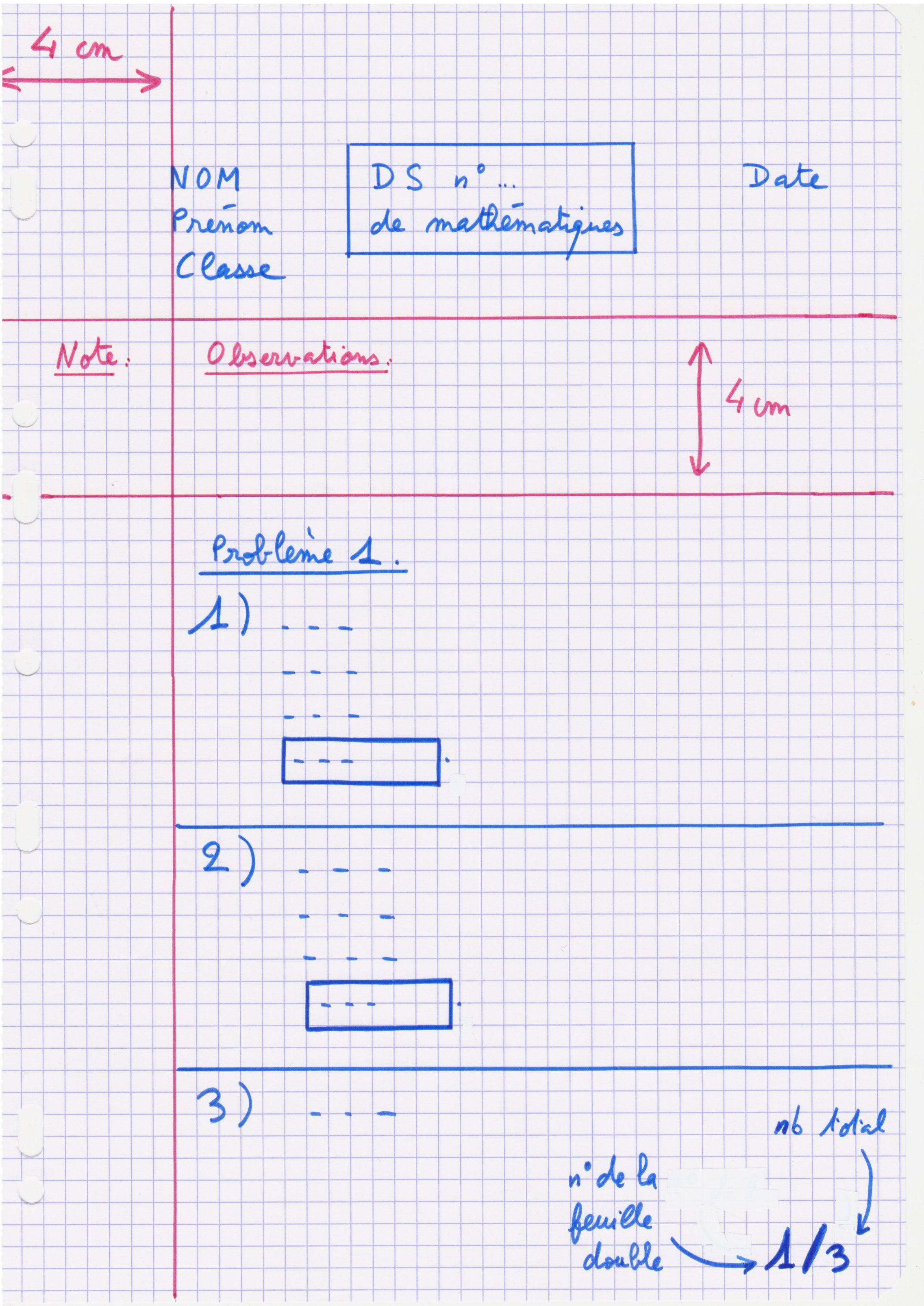
Devoir de maison n°1

Toute l'année, les copies (de DS et DM) seront présentées selon le modèle suivant :



Problème 1 : *factorisation de polynômes réels - d'après oral II 2024*

1. Soit $P = X^3 - X^2 + 1$. Montrer que P admet une unique racine réelle a.
2. Soit $Q = X^5 + X + 1$. Montrer que P divise Q.
   Écrie Q comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $R = X^5 + X^4 + 1$. Donner une relation entre R et Q.
   Écrie R comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Problème 2 : *approximation d'un point fixe - d'après Mines-Télécom 2023*

Soit $f(x) = \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{9}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 \in]0, 1/2[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0, 1/2[$.
2. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sa convergence et sa limite.
3. Montrer qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq k^n/2$.
4. Écrire une fonction Python d'argument p qui retourne une valeur approchée de α à 10^{-p} près.

Problème 3 : *une suite implicite - d'après oral II 2022*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{2x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x - k^2}$ et $g_n(x) = \dfrac{1}{2x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\frac{1}{4} - k^2}$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = -\dfrac{4n}{2n+1}$.
3. Comparer $f_n(x)$ et $g_n(x)$ suivant les valeurs de $x \in]0, 1[$.
4. En déduire que $u_n \leq \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Trouver la limite de (u_n).