Éléments de correction du DM n°1

Problème 1 : *factorisation de polynômes réels - d'après oral II 2024*

1. On note encore $P : x \longmapsto x^3 - x^2 + 1$ la fonction polynomiale réelle associée au polynôme P. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[.$$

P est donc continue strictement croissante sur $\left]-\infty, 0\right]$, strictement décroissante sur $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$. De plus, $P(-1) = -1 < 0,\ P(0) = 1 > 0,\ P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{23}{27} > 0$. Donc, d'après le corollaire du T.V.I., $\boxed{P \text{ admet une unique racine réelle } a \text{ et } a \in]-1, 0[}$.

2. $Q = X^5 + X + 1 = X^2(X^3 - X^2 + 1) + X^4 - X^2 + X + 1 = \cdots = (X^2 + X + 1)(X^3 - X^2 + 1)$.

$X^3 - X^2 + 1 = P(X) - P(a) = X^3 - a^3 - (X^2 - a^2) = (X-a)(X^2 + aX + a^2) - (X-a)(X+a)$.

Donc $\boxed{P \text{ divise } Q \text{ et } Q = (X^2 + X + 1)(X-a)(X^2 + (a-1)X + a^2 - a)}$.

$X^2 + X + 1$ a pour discriminant $\Delta_1 = -3 < 0$ et $X^2 + (a-1)X + a^2 - a$ a pour discriminant

$$\Delta(a) = (a-1)^2 - 4(a^2 - a) = -3a^2 + 2a + 1 = (1-a)(3a+1) \geq 0 \underset{a \leq 0}{\Longleftrightarrow} a \geq -\frac{1}{3}.$$

$P\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{23}{27} > 0 > P(-1)$ donc $-1 < a < -\frac{1}{3}$ et $\Delta(a) < 0$.

Remarque : a est l'unique racine réelle de P et $P'(a) \neq 0$ car $a \notin \{0, 2/3\}$. Donc $P = (X-a)(X^2 + (a-1)X + a^2 - a)$, avec $X^2 + (a-1)X + a^2 - a$ irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

3. $\boxed{R = Q + X^4 - X}$ et $X^4 - X = X(X^3 - 1) = X(X-1)(X^2 + X + 1)$.

Donc $R = (X^2 + X + 1)(P + X^2 - X) = (X^2 + X + 1)(X^3 - X + 1)$.

La fonction $L : x \longmapsto x^3 - x + 1$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ L'(x) = 3x^2 - 1 > 0 \Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[.$$

L est continue strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, strictement croissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$, $L(-2) < 0 < L(-1) < L\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $L\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$. Donc, d'après le corollaire du T.V.I., $\boxed{L \text{ admet une unique racine réelle } b \text{ et } b \in]-2, -1[}$.

$$X^3 - X + 1 = L(X) - L(b) = X^3 - b^3 - (X - b) = (X-b)(X^2 + bX + b^2 - 1).$$

De plus, b est l'unique racine réelle de L et $L'(b) \neq 0$ car $b \notin \{\pm 1/\sqrt{3}\}$. Donc $X^2 + bX + b^2 - 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Finalement, la factorisation de R en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est

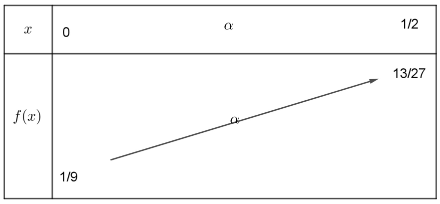
$$\boxed{R = (X^2 + X + 1)(X-b)(X^2 + bX + b^2 - 1)}.$$

Problème 2 : *approximation d'un point fixe - d'après Mines-Télécom 2023*

1. On pose $g(x) = f(x) - x = \dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9}$. La fonction g est dérivable sur $[0, 1/2]$ et
$$\forall x \in [0, 1/2],\ g'(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} < 0.$$
g est donc continue strictement décroissante sur $[0, 1/2]$ et $g(0) = 1/9 > 0 > -3/72 = g(1/2)$.
D'après le corolaire du T.V.I., $\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans }]0, 1/2[}$.

2. f est continue et strictement croissante sur $[0, 1/2]$, comme somme de fonctions qui le sont. D'où

x	0		α		$1/2$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	



• Si $x_0 \in]0, \alpha[$: On a $0 < x_0 < x_1 < \alpha$ d'après les deux tableaux ci-dessus.
Si $0 < x_n < x_{n+1} < \alpha$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ alors $0 < x_{n+1} < x_{n+2} < \alpha$, d'après les variations de f.
Dans ce cas, par récurrence, $\boxed{(x_n) \text{ est croissante}}$ et encadrée par 0 et $\alpha > 0$. Par le théorème de la limite monotone et passage à la limite, $\boxed{(x_n) \text{ converge vers un réel } \ell \in [0, \alpha]}$. Par continuité de f, $\ell = f(\ell)$ et d'après 1., $\boxed{\ell = \alpha}$.

• Si $x_0 \in]\alpha, 1/2[$: On a $\alpha < x_1 < x_0 < \frac{1}{2}$ d'après les deux tableaux ci-dessus.
Si $\alpha < x_{n+1} < x_n < \frac{1}{2}$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ alors $\alpha < x_{n+2} < x_{n+1} < \frac{1}{2}$, d'après les variations de f.
Dans ce cas, par récurrence, $\boxed{(x_n) \text{ est décroissante}}$ et encadrée par α et $1/2 > \alpha$. Par le théorème de la limite monotone et passage à la limite, $\boxed{(x_n) \text{ converge vers un réel } \ell \in [\alpha, 1/2]}$.
Par continuité de f et 1., on a encore $\boxed{\ell = \alpha}$.

• Si $x_0 = \alpha$: Par récurrence immédiate, $\boxed{(x_n) \text{ est stationnaire de valeur } \alpha}$.

3. f est dérivable sur $[0, 1/2]$ et $\forall x \in [0, 1/2],\ |f'(x)| = \underbrace{\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{3}}_{\geq 0} \leq \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$. On pose $k = \dfrac{3}{4}$.
Par l'inégalité des accroissements finis, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| \leq k|x_n - \alpha|,\ \text{car } x_n, \alpha \in [0, 1/2].$$
$|x_0 - \alpha| \leq \dfrac{1}{2} = \dfrac{k^0}{2}$ et si $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{k^n}{2}$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ alors $|x_{n+1} - \alpha| \leq k|x_n - \alpha| \leq \dfrac{k^{n+1}}{2}$.
Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \alpha| \leq \dfrac{k^n}{2},\ \text{avec } k = \dfrac{3}{4} \in]0, 1[}$.

4. cf. exercices 6 de la feuille de TD 1.

Problème 3 : *une suite implicite - d'après oral II 2022*

1. Pour tout $x \in]0,1[$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$, $x-k^2 \neq 0$. Donc f_n est continue strictement décroissante sur $]0,1[$, comme somme de fonctions qui le sont. De plus, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1^2} + \cdots + \frac{1}{x-n^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } f_n(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -\infty.$$

Par le corollaire du T.V.I., $\boxed{\text{il existe un unique réel } u_n \in]0,1[\text{ tel que } f_n(u_n)=0}$.

2. On a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\frac14 - k^2} = -\frac{4}{3} = -\frac{4\times 1}{2\times 1+1}$ et si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac14 - k^2} = -\frac{4n}{2n+1}$ à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\frac14 - k^2} = -\frac{4n}{2n+1} + \frac{1}{\frac14-(n+1)^2} = \frac{-4n}{2n+1} - \frac{4}{(2n+1)(2n+3)} = -\frac{4\cancel{(2n+1)}(n+1)}{\cancel{(2n+1)}(2(n+1)+1)}.$$

Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac14 - k^2} = -\frac{4n}{2n+1}}$.

3. $$\forall x \in]0,1[,\ f_n(x) - g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac14 - k^2} \underset{\text{linéarité}}{=} \left(\frac14 - x\right) \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{(x-k^2)\left(\frac14 - k^2\right)}}_{>0},$$

Donc $\boxed{f_n\left(\frac14\right) = g_n\left(\frac14\right),\ f_n(x) > g_n(x) \text{ si } x \in \left]0,\frac14\right[\text{ et } f_n(x) < g_n(x) \text{ si } x \in \left]\frac14, 1\right[}$.

4. $u_1 < 1 < \frac14 + \frac11$ et si $n \geq 2$ alors $\frac14 + \frac1n \in \left]\frac14, 1\right[$ et donc $f_n\left(\frac14 + \frac1n\right) < g_n\left(\frac14 + \frac1n\right)$. De plus,

$$g_n\left(\frac14 + \frac1n\right) = \frac{1}{\frac12 + \frac2n} - \frac{4n}{2n+1} = \frac{-14n}{(n+4)(2n+1)} < 0 = f_n(u_n), \text{ donc } f_n\left(\frac14 + \frac1n\right) < f_n(u_n).$$

Comme f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$, $\boxed{u_n \leq \frac14 + \frac1n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f_n\left(\frac14\right) = g_n\left(\frac14\right) = 2 - \frac{4n}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} > 0 = f_n(u_n)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac14 \leq u_n \leq \frac14 + \frac1n$ et, par encadrement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac14}$.