Cahier de texte de Maths

Table des matières

1 Semaine du 02/09/2024 au 08/09/2024

Le 02/09/24**, accueil : 3h**

- Accueil, organisation des groupes, présentation des objectifs généraux, organisation du travail, organisation des TIPE ...

Le 03/09/24**, cours : 2h**

- Cours (fonctions de la variable réelle) : valeur absolue, distance entre réels, propriétés, inégalité triangulaire, généralisation, une fonction est bornée ssi sa valeur absolue est majorée, exemple ; limite finie ou infinie en a ou à l'infini, illustrations, unicité de la limite en a, cas où f est définie en a, composition avec une suite, exemples ; voisinage de a, si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a, limite finie par encadrement, limite infinie par majoration ou minoration, passage à la limite dans une inégalité large, croissances comparées, exemples ;
- **À faire :** travailler le cours (fonctions) pour le 05/09 ; chercher le DM1 pour le 13/09.

Le 05/09/24**, cours + TD : 2h + 2h**

- Cours (fonctions de la variable réelle) : continuité, prolongement continu, T.V.I., corollaire et théorème de la bijection, théorèmes des bornes atteintes, exemples ; dérivabilité, classe $\mathscr{C}^1$, la dérivabilité entraine la continuité, caractérisation de la dérivabilité par le DL_1, interprétation graphique, CN d'existence d'un extremum en un point intérieur, théorème de Rolle, T.A.F., I.A.F., caractérisation des fonctions monotones et constantes parmi les fonctions dérivables, théorème de la limite de la dérivée, exemples ;
- Exercices $4 - 5$ (fonctions de la variable réelle) : application du Théorème de Rolle au polynôme $x^n - x + 1$; existence et unicité d'un point fixe pour une fonction continue strictement décroissante ;
- **À faire :** travailler le cours (fonctions) pour le 06/09 ; chercher le DM1 pour le 13/09.

Le 06/09/24**, cours + TD : 2h + 2h**

- Cours (fonctions de la variable réelle) : dérivées successives, classes $\mathscr{C}^n$, inclusions, dérivée *n-ème* usuelles, d'une combinaison linéaire, d'un produit, théorèmes généraux, bijection réciproque $\mathscr{C}^n$, exemples ; relations de comparaison, propriétés, équivalents usuels, opérations compatibles avec la relation d'équivalence, transfert de propriété par la relation d'équivalence (signe et limite), exemples ; développement limité, unicité, troncature, primitivation, formule de Taylor-Young, DL(0) usuels, lien entre DL et équivalents, étude locale, DL(0) d'une fonction paire ou impaire, calcul du DL d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'une composée, d'un quotient, exemples ;
- Exercices 13 1. et 14 1. (fonctions de la variable réelle) : calcul d'équivalents simples et de limites ; calcul de développements limités ;
- **À faire :** travailler le cours et finir les exercices $13 - 14$ du TD (fonctions) pour le 10/09 ; chercher le DM1 pour le 13/09.

2 Semaine du 09/09/2024 au 15/09/2024

Le 10/09/24**, cours : 2h**

- Correction des $13-14$ (fin) et 10 (fonctions de la variable réelle) : calcul d'équivalents simples et de limites ; calcul de développements limités ; montrer que le prolongement continu du sinus cardinal est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$;
- Cours (courbes planes) : produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^2$ et norme associée, caractérisation de l'orthogonalité, propriétés du produit scalaire, exemple ; produit mixte dans $\mathbb{R}^2$, caractérisation de la colinéarité, propriétés du produit mixte, exemple ; définition d'une droite affine, paramétrage, équations cartésiennes, exemple ;
- **À faire :** travailler le cours (géométrie plane) pour le 12/09 ; finir le DM1 pour le 13/09.

Le 12/09/24**, cours + TD : 2h + 2h**

- Cours (courbes planes) : distance d'un point à une droite, paramétrages et équations cartésiennes d'un cercle, position relatives d'une droite et d'un cercle, exemples et méthodes ; fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, interprétation en cinématique, limites et continuité, caractérisation par les coordonnées, exemple ; dérivabilité d'une fonction vectorielle, caractérisation par les coordonnées, formules de dérivation d'une combinaison linéaire ;
- Exercices $9-15-8$ (fonctions de la variable réelle) : pour $f' \leq 1$, montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = kx$ si $k > 1$, montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$ peut-être vide, un singleton ou $\mathbb{R}$, et que si il contient deux points $a < b$ alors il contient le segment $[a, b]$; bijectivité de la restriction d'une fonction polynômiale s'annulant en 0 à un intervalle, existence du DL_4 en 0 de la réciproque qui s'annule en 0, calcul du DL d'une réciproque par réciprocité et unicité du DL (identification des coefficients) ; justifier des inégalités usuelles, point méthode ;
- **À faire :** travailler le cours (géométrie plane) et finir le DM1 pour le 13/09.

Le 13/09/24**, cours + TD : 2h + 2h**

- Cours (courbes planes) : formules de dérivation d'une composée à droite par une fonction réelle, d'un produit par une fonction réelle, d'un produit scalaire, exemple ; fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^n$ et dérivée *n-ième*, caractérisation par les coordonnées, dérivée *n-ième* d'une combinaison linéaire et d'un produit, formule de Taylor-Young, exemple et extension aus fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et au produit vectoriel ; courbe paramétrée, interprétation géométrique, exemples de passage d'un paramétrage à une équation cartésienne et de changement de paramètre (bijectif) ; point régulier, point stationnaire, courbe régulière, exemple de courbe (géométrique) ayant un paramétrage régulier et un autre paramétrage non régulier ; tangente et normale à une courbe paramétrée, vecteur directeur en un point régulier et en un point stationnaire ;
- Exercices $2-3-5$ (courbes planes) : établir l'équivalence entre relations avec des nombres complexes, en déduire que les racines cubiques d'un complexe de module 1 ont pour images les points d'intersection d'un cercle et d'une hyperbole, application pour $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$; connaissant des équations cartésiennes de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, donner un vecteur directeur pour chacune, calculer la mesure de l'angle formé par ces deux vecteurs, déterminer des équations des bissectrices de $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$; identifier un cercle, son centre et son rayon à partir d'une équation cartésienne, déterminer ses tangentes parallèle à une droite donnée, et ses tangentes passant par un point donné ;
- **À faire :** travailler le cours (géométrie plane) et la correction du DM1 (préparer des questions si nécessaire) pour le 17/09.

3 Semaine du 16/09/2024 au 22/09/2024

Le 17/09/24**, cours :** 2h

- Correction du DM1 : quelques remarques et mises au point ;
- Cours (courbes planes) : tangentes aux points stationnaires d'une astroïde, tangentes aux points réguliers, normales et intersections avec les axes de coordonnées, distance entre les deux ; plan d'étude d'une courbe paramétrée, méthode de réduction du domaine d'étude, exemple (étude complète et tracé d'une courbe de Lissajous) ;
- **À faire :** travailler le cours (géométrie plane) pour le 21/09 ; chercher le DM2 pour le 27/09.

Le 19/09/24**, cours + TD :** 2h + 2h

- Cours (courbes planes) : méthode d'étude locale en un point régulier ou stationnaire, nature du point, exemples (point d'inflexion et point de rebroussement de première espèce) ; plan d'étude des branches infinies, exemples (asymptotes horizontal, verticale et oblique, recherche d'un point double et tangente en un point de prolongement) ;
- Exercices 8 − 10 − 11 1. (courbes planes) : étude d'une courbe et recherche des points où la tangente est aussi normale à la courbe ; étude d'un lemniscate de Bernoulli ; étude et tracé d'un bifolium ;
- **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 11 1. (géométrie plane) pour le 20/09 ; chercher le DM2 pour le 27/09.

Le 20/09/24**, cours + TD :** 2h + 2h

- Cours (courbes planes) : enveloppe d'une famille de droites, théorème d'existence et méthode de détermination d'une enveloppe, exemple (cardioïde, comme enveloppe d'une famille de sécantes du cercle trigonométrique) ;
- Cours (suites et séries numériques) : suites usuelles RL1 et RL2, exemples ; limite d'une suite, convergence, divergence, unicité de la limite, limite des suites extraites, une suite convergente est bornée, une suite de limite non nulle est de même signe à partir d'un certain rang, théorèmes de comparaison et de passage à la limite, relations de comparaison, croissances comparées, exemple (existence d'une suite implicite) ;
- Correction de l'exercice 11 (fin) (courbes planes) : pour un bifolium, nature du point stationnaire, montrer que les vecteur $\overrightarrow{OM}(t+\pi)$ et $\overrightarrow{OM}(t)$ sont orthogonaux, que le milieu de $[M(t+\pi)M(t)]$ décrit une portion de cercle d'équation donnée ;
- Exercices 12 b) (courbes planes) : étude et tracé d'une courbe avec branches infinies ;
- **À faire :** travailler le cours, finir l'exercice 3 du cours (suites et séries) et l'exercice 16 du TD (géométrie plane) pour le 24/09 ; chercher le DM2 pour le 27/09.

4 Semaine du 23/09/2024 au 29/09/2024

Le 24/09/24**, cours :** 2h

- Correction de l'exercice 16 (courbes planes) : calcul de l'enveloppe d'une famille de droites définies par des équations cartésiennes ;
- Cours (suites et séries numériques) : étude de la limite d'une suite implicite et développement asymptotique ; limite monotone, exemples (suites $u_{n+1} = f(u_n)$, cas où f est croissante et cas où f est décroissante) ; théorème de convergence des suites adjacentes et encadrement de la limite, exemple (approximation décimale d'un réel) ;
- **À faire :** travailler le cours (suites et séries) pour le 26/09 ; finir le DM2 pour le 27/09.

Le 26/09/24**, cours + TD :** 2h **+** 2h

- Cours (suites et séries numériques) : définition d'une série, des sommes partielles, d'une série convergente et de sa somme, d'une série divergente, des restes d'une série convergente, exemple ; condition nécessaire de convergence, divergence grossière, linéarité de la somme en cas de convergence ; critères de convergence des séries géométriques et télescopiques, exemples ; comparaison série-intégrale, méthode d'encadrement des sommes partielles en cas de divergence, cas de la série harmonique, exemple (série de Bertrand convergente) ;
- Exercices $2-4-5$ 1.2. (suites et séries numériques) : montrer que deux suites imbriquées sont bien définies, convergentes de même limite ; étude de la limite de suites définies par une somme finie, par encadrement ; convergence et somme de quelques séries géométriques ou télescopiques ;
- **À faire :** travailler le cours (suites et séries) et finir le DM2 pour le 27/09.

Le 27/09/24**, cours + TD :** 2h **+** 2h

- Cours (suites et séries numériques) : critère de convergence des séries de Riemann, exemple (équivalent du reste d'ordre N de la série $\sum 1/n^2$) ; théorème de convergence des séries alternées et encadrement de la somme et du reste, exemple (approximation de π) ; pour les séries à termes positifs, théorème de la limite monotone, exemple (série des restes d'une série à terme positifs convergente) ; comparaison de séries à termes positifs par $\leq$, $\mathcal{O}$, o, $\sim$, exemples ; convergence d'une suite par une comparaison suite-série (constante d'Euler) ;
- Exercices 11 1.3. et 12 (suites et séries numériques) : étude de la nature de quelques séries ; convergence d'une série de Riemann alternée et d'une série qui s'en déduisent par développement asymptotique ;
- **À faire :** travailler le cours (suites et séries) et préparer des questions sur le DM2 pour le 01/10 ; réviser les chapitres $1-2-3$ (cours, TD et DM) pour le DS1 du 05/10.

5 Semaine du 30/09/2024 au 06/10/2024

Le 01/10/24**, cours :** 2h

- Correction de l'exercice 12 (fin) (suites et séries numériques) : étude de la convergence d'une série qui par développement asymptotique ;
- Cours (suites et séries numériques) : absolue convergence, ACV entraine CV et inégalité triangulaire, comparaison de séries absolument convergentes, comparaison avec une série de Riemann, exemples ; règle de d'Alembert, exemples ; produit de Cauchy et convergence du produit de Cauchy de deux séries ACV, exemple (produit de deux séries géométriques) ;
- Correction du DM2 : quelques remarques et mises au point ;
- **À faire :** travailler le cours (suites et séries) pour le 03/10 ; réviser les chapitres $1-2-3$ (cours, TD et DM) pour le DS1 du 05/10.

Le 03/10/23**, cours + TD :** 2h **+** 2h

- Cours (Intégration sur un intervalle) : intégrale sur un segment d'une fonction en escalier et d'une fonction continue (au sens de Riemann), interprétation géométrique, extension, valeur moyenne, relation de Chasles, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, cas d'une fonction continue positive d'intégrale nulle ; approximation par la méthode des rectangles et sommes de Riemann (à gauche et à droite), exemple (limite d'une suite) ; théorème fondamental du calcul intégral et corollaire, exemple (fonction intégrale à bornes variables) ; inégalités de Taylor, exemple (inégalités usuelles et DSE) ;

— Exercices 7, 11 (fin) et 13 (suites et séries numériques) : connaissant la somme des $1/n^2$, calculer d'autres sommes, par découpage, télescopage ou produit de Cauchy ; étude de la nature de quelques séries, point méthode ; convergence et absolue convergence de la série de t.g. $(-1)^n \ln(n)/n^\alpha$ suivant les valeurs de α, équivalent de la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} \ln(n)/n^\alpha$ en cas de divergence ;

— **À faire :** travailler le cours (intégration) finir l'exercice 13 du TD et travailler le 19 (suites et séries) pour le 04/10 ; réviser les chapitres $1-2-3$ (cours, TD et DM) pour le 05/10.

Le 04/10/23**, cours + TD : 2h + 2h**

— Correction de l'exercice 13 (fin) (suites et séries numériques) : équivalent des sommes partielles de la série de t.g. $\ln(n)/n^\alpha$ pour $0 < \alpha \leq 1$;

— Cours (Intégration sur un intervalle) : IPP et changement de variable sur un segment, cas des fonctions paires, impaires, périodiques, exemples (le tour des méthodes de première année) ; cas complexe, extension de certains résultats, exemple (limite de $\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$ pour f $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$) ; intégrale généralisée sur $[a, b[$ ou $]a, b]$, cas de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$;

— Exercices 1, 4 1.2. et 6 (Intégration sur un intervalle) : sommes de Riemann ; calcul d'intégrales sur un segment ; suite d'intégrales sur un segment ;

— **À faire :** travailler le cours, finir l'exercice 6 et chercher l'exercice 9a) du TD (intégration) pour le 08/10 ; chercher le DM3 pour le 15/10.

6 Semaine du 07/10/2024 au 13/10/2024

Le 08/10/24**, cours : 2h**

— Correction de l'exercice 9 a) (Intégration sur un intervalle) : étudie d'une fonction intégrale à bornes variables (domaine de définition, dérivabilité, variation, limites) ;

— Cours (Intégration sur un intervalle) : intégrales usuelles, cas d'une fonction prolongeable par continuité en a et/ou en b, intégrale doublement généralisée et relation de Chasles, exemples ; linéarité de l'intégrale généralisée en cas de convergence, cas de l'intégrale d'une somme, cas complexe, exemple ;

— **À faire :** travailler le cours (intégration) pour le 10/10 ; chercher le DM3 pour le 15/10.

Le 10/10/23**, cours + TD : 2h + 2h**

— Cours (Intégration sur un intervalle) : positivité et croissance dans le cas réel et en cas de convergence ; IPP et changement de variable pour les intégrales généralisées, exemples ; théorème de la limite monotone pour l'intégrale d'une fonction continue positive, comparaison des intégrales de fonctions positives par les relation $\leq, \mathcal{O}, o$, comparaison avec des intégrales de Riemann, exemple ; intégrale ACV et fonction intégrable sur un intervalle, cas des fonctions continues sur un segment et des fonctions de signe constant, fonctions intégrables de référence, l'intégrale d'une fonction intégrable converge (réciproque fausse), inégalité triangulaire pour une fonction intégrable, comparaison avec une fonction intégrable, exemples ;

— Exercices 11, 12 (Intégration sur un intervalle) : convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\alpha(t)}$ et de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\alpha(n)}$ par comparaison série-intégrale ; convergence et valeur de quelques intégrales, par changement de variable et/ou IPP ;

— **À faire :** travailler le cours (intégration) pour le 11/10 ; chercher le DM3 pour le 15/10.

Le 11/10/23**, cours + TD : 2h + 2h**

- Cours (Intégration sur un intervalle) : étude d'une intégrale CV non ACV (intégrale de Dirichlet) ; si f est intégrable positive sur I et $\int_I f = 0$ alors f est nulle sur I, exemple ; $L^1(I, \mathbb{K})$ est un e.v., exemple (le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable) ;
- Cours (Compléments d'algèbre linéaire) : structure d'espace vectoriel, espaces usuels, produit d'e.v. ; définition et caractérisation des s.e.v., stabilité par combinaisons linéaires, l'intersection de s.e.v. est un s.e.v., pas la réunion, s.e.v. engendré par une famille finie de vecteurs, propriétés, exemples ;
- Exercices $17 - 20$ 1.3. et 22 (Intégration sur un intervalle) : convergence d'une intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} P_n(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, $P_n \in \mathbb{R}[X]$, relation entre I_n et I_{n-1}, expression de I_n, somme de la série $\sum \frac{I_n}{n!}x^n$, comme somme d'un produit de Cauchy ; étude de la nature de séries, le tour des méthodes ; étude de l'intégrabilité de fonctions f_α suivant les valeurs de $\alpha > 0$ et semi-convergence ;
- **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 20 du TD4 (intégration) pour le 15/10 ; finir le DM3 pour le 17/10.

7 Semaine du 14/10/2024 au 20/10/2024

Le 15/10/24**, cours : 2h**

- Correction de l'exercice 20 2. (Intégration sur un intervalle) : étude de la nature de séries ;
- Cours (Compléments d'algèbre linéaire) : familles génératrices, propriétés, famille libre, propriétés, exemple ; bases, caractérisation par les coordonnées, écriture matricielle d'un vecteur dans une base, bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de $\mathbb{K}_n[X]$, une famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre, si $\deg(P_k) = k$ alors $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$; e.v. de dimension finie, théorèmes de la base extraite et de la base incomplète, existence de bases en dimension finie, dimension, droites et plans vectoriels, le cardinal d'une famille génératrice est supérieur ou égal à la dimension de l'espace avec égalité ssi c'est une base, cas des familles libres, dimension d'un s.e.v., cas d'égalité, dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}_n[X]$; rang d'une famille finie de vecteurs, caractérisation des familles libres, génératrices et des bases par le rang, exemple ;
- **À faire :** travailler le cours (algèbre) et finir le DM3 pour le 17/10.

Le 17/10/23**, cours + TD : 2h + 2h**

- Cours (Compléments d'algèbre linéaire) : dimension du produit d'e.v. de dimensions finies, exemples (dimension et bases de produits d'e.v.) ; la somme de deux s.e.v. est un s.e.v., somme de deux Vect, somme directe, s.e.v. supplémentaires, cas de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et raisonnement par analyse-synthèse ; caractérisation par l'intersection nulle, formule de Grassman et caractérisation de la supplémentarité par la dimension, existence et dimension de supplémentaires en dimension finie ; la somme de de plusieurs s.e.v. est un s.e.v., somme directe, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul, caractérisation de la supplémentarité par la base adaptée, dimension de la somme de de s.e.v. en somme directe, exemples ;
- Correction de l'exercice 20 4. (Intégration sur un intervalle) : étude de la nature de séries suivant la valeur d'un paramètre ;
- Exercices $16 - 21$ (Intégration sur un intervalle) : nature et valeur d'une intégrale, par découpage et changement de variable ; intégrabilité d'une fonction complexe suivant la valeur de $z \in \mathbb{C}$;
- **À faire :** travailler le cours (algèbre) et finir le DM3 pour le 18/10.

Le 18/10/23**, cours + TD : 2h + 2h**

- Cours (Compléments d'algèbre linéaire) : hyperplan, caractérisation par la dimension, caractérisation par une équation linéaire, dimension de l'intersection de plusieurs hyperplans, caractérisation d'un s.e.v. par l'intersection de plusieurs hyperplans puis par un système d'équations linéaires, exemples ; applications linéaires, endomorphismes, formes linéaires, image du vecteur nul et d'une combinaison linéaire quelconque, exemples ; image et noyau, écriture des solutions d'une équation linéaire $f(x) = b$, lien avec les équations différentielles et autres problèmes linéaires, caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité, exemple ; une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire, de même pour la composée et la réciproque (si c'est bijectif), distributivité de la composition à gauche ou a droite, $\mathscr{L}(E, F)$ est un e.v., puissances d'un endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, groupe linéaire, exemple ;
- Exercices $2-3$ (Compléments d'algèbre linéaire) : montrer qu'un ensemble de matrices est un s.e.v. de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, en donner une base, montrer qu'il est stable par produit, décomposer une puissance dans sa base ; montrer qu'un ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 2 est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaires d'ordre 2 homogène à coefficients constants est un plan vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$; montrer qu'un ensemble est un s.e.v. de $\mathbb{R}_3[X]$, en construire un supplémentaire ;
- **À faire :** relire les cours des chapitres $1-2-3$ et reprendre le DS1 et le DM3 ; travailler les chapitres $4-5$ (pour le chapitre 5 travailler le cours jusqu'au Théorème 19 (du rang) et chercher l'exercice 11 du cours) pour le 05/11 ; chercher le DM4 pour le 8/11.

8 Semaine du 04/11/2024 au 10/11/2024

Le 05/11/24**, cours : 2h.**

- Cours (Compléments d'algèbre linéaire) : sur une espace de dimension finie, génération d'une application linéaire par l'image d'une base, caractérisation de l'égalité de deux applications linéaires, de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité par l'image d'une base, deux s.e.v. sont isomorphes ssi ils ont même dimension, si $\dim(E) = \dim(F)$ (finie) alors $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective ssi f est injective ssi f est surjective, cas des endomorphismes en dimension finie, rang d'une application linéaire, lien avec le rang de l'image d'une base, propriétés du rang, théorème du rang, exemple ; matrice d'une application linéaire dans des bases données, expression matricielle de l'image d'un vecteur, application linéaire canoniquement associée à une matrice, exemple ; caractérisation de l'égalité de deux applications linéaires par l'égalité des matrices, matrice d'une combinaison linéaire, isomorphisme $f \mapsto \mathrm{Mat}\mathscr{B}, \mathscr{B}'(f)$, dimension de $\mathscr{L}(E, F)$, matrice d'une composée, caractérisation des isomorphismes par les matrices inversibles, matrice d'une réciproque, lien avec les systèmes linéaires ;
- **À faire :** travailler le cours et chercher l'exercice 13 du cours (algèbre linéaire) pour le 07/11 ; finir le DM4 pour le 08/11.

Le 07/11/24**, cours + TD : 2h + 2h**

- cours (Compléments d'algèbre linéaire) : exemple (inversibilité et inverse d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$) ; noyau, image, rang d'une matrice, propriétés du rang, théorème du rang matriciel, caractérisations des matrices inversibles, exemple ; lien entre noyaux, images et rangs d'une application linéaire et de sa matrice, exemple ; matrice et formule de changement de bases pour les coordonnées, formule de changement de base pour la matrice d'une application linéaire, cas des endomorphismes, exemple ;
- Correction de l'exercice 5 (Compléments d'algèbre linéaire) : pour un endomorphisme u nilpotent, montrer qu'une famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^k(x_0))$ est libre, en déduire le noyau et le rang de $\mathrm{e}^u - \mathrm{id}_E$;

— Exercices 6 (Compléments d'algèbre linéaire) : pour deux endomorphismes d'un e.v. E de dimension finie tels que $f \circ g = 0$, on montre que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq \dim(E)$, avec égalité ssi $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)$; dans le cas où $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E$, montrer que les sommes sont directes en dimension finie, mais pas toujours en dimension infinie ;

— **À faire :** travailler le cours (algèbre) et finir le DM4 pour le 08/11.

Le 08/11/24**, cours + TD : 2h + 2h**

— Cours (Compléments d'algèbre linéaire) : matrices semblables, exemples ; trace, trace de $A + \lambda B$, de AB, de A^T, deux matrices semblables ont même rang et même trace, trace d'un endomorphisme, exemples ; s.e.v. F stable par un endomorphisme f, endomorphisme induit, exemple ; matrice dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, cas où G est aussi stable par f, exemples ; homothétie, bijectivité et réciproque d'une homothétie de rapport non nul ; définition géométrique d'un projecteur, caractérisation des projecteurs, matrice dans une base adaptée, exemple dans $\mathbb{R}^2$; définition géométrique d'une symétrie, caractérisation des symétries, matrice dans une base adaptée, exemple dans $\mathbb{R}^3$; symétrie $M \longmapsto M^T$;

— Exercices 13 (Compléments d'algèbre linéaire) : montrer que $f : M \longmapsto M + \text{tr}(M)A$ induit un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, que f est bijectif si $\text{tr}(A) \neq -1$, déterminer son rang si $\text{tr}(A) = -1$ en montrant que $\text{Ker}(\text{tr})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;

— **À faire :** travailler le cours et chercher les exercices $17 - 20$ du TD (algèbre) pour le 12/11 ; chercher le DM5 pour le 19/11.

9 Semaine du 11/11/2024 au 17/11/2024

Le 12/11/24**, cours : 2h.**

— Correction des exercices 13 (fin) et $17 - 20$ (Compléments d'algèbre linéaire) : Pour $\Phi(M) = M + \text{tr}(M)A$, montrer que $\text{rg}(\Phi) = n^2 - 1$ si $\text{tr}(A) = -1$; image d'une matrice de rang 1, vérifier qu'une colonne est dans son noyau et la compléter en une base du noyau, justifier que l'image et le noyau ne sont pas supplémentaires, montrer que A est semblable à une matrice nilpotente d'indice 2 réduite et calculer les puissances de $(I + A)$; montrer que deux applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ sont respectivement un projecteur et une symétrie, puis déterminer leurs espaces caractéristiques et des équations de ceux-ci ;

— Cours (Déterminants) : déterminant d'ordre 2, interprétation géométrique, exemple, caractérisation d'une matrice d'ordre 2 inversible par le déterminant non nul et matrice inverse ;

— **À faire :** travailler les paragraphes 1.1 et 1.2. du cours et chercher l'exercice 2 du cours (déterminants) pour le 14/11 ; chercher le DM5 pour le 19/11.

Le 14/11/24**, cours + TD : 2h + 2h**

— cours (Déterminants) : déterminant d'ordre 3, interprétation géométrique, exemple ; déterminant d'ordre n, premières propriétés, effet des opérations élémentaires sur sa valeur, déterminant d'une matrice triangulaire ou triangulaire par blocs, exemple ; déterminant d'un produit, d'une puissance, caractérisation de l'inversibilité par le déterminant, déterminant d'une inverse, de matrices semblables, d'une transposée, les propriétés sur les colonnes d'un déterminant se transposent sur les lignes, exemple ; développement par rapport à une ligne ou une colonne, exemples et point méthode ;

— Exercices $8 - 9 - 26$ (Compléments d'algèbre linéaire) : montrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est un isomorphisme, écrire sa matrice dans les bases canoniques, en déduire que l'on peut retrouver une loi de probabilité finie connaissant les $\text{E}(X^k)$; montrer qu'une application φ est linéaire de $(\mathbb{C}_1[X])^2$ dans $\mathbb{C}_3[X]$, qu'une famille $\mathscr{B}$ est une base de $(\mathbb{C}_1[X])^2$,

écrire la matrice M de φ dans des bases données ; pour deux endomorphismes t.q. $f+g=\mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\leq \dim(E)$, montrer que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(g)$ et que f et g sont des projecteurs ;
- **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 6 du cours (déterminants) pour le 15/11 ; chercher le DM5 pour le 19/11.

Le 15/11/24**, cours + TD : 2h + 2h**
- cours (Déterminants) : calcul du déterminant d'une matrice (antidiagonale) ; déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée, caractérisation des bases par le déterminant, exemples ; déterminant d'un endomorphisme f, de λf, de $g\circ f$, caractérisation des automorphismes par le déterminant, déterminant d'une réciproque, exemple ;
- Cours (Réduction d'endomorphismes) : La droite $\mathrm{Vect}(u)$ est stable par $f\in\mathscr{L}(E)$ ssi il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f(u)=\lambda u$, valeurs propres, vecteurs propres, exemple ; espace propre associé, cas où $\lambda=-1,0,1$, exemple (dans $\mathbb{R}[X]$ de dimension infinie) ; la somme d'espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre, exemple ;
- Exercices $1-2-8-10$ (Déterminants) : distance entre deux droite de l'espace usuel ; déterminer les valeurs d'un paramètre pour lesquelles trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ forment une base, déterminer un supplémentaire et des équations linéaires du s.e.v. engendré par ses trois vecteurs dans le cas contraire ; calcul d'un déterminant vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 ; déterminants de coefficients $a_{ij}=\max\{i,j\}$ et $b_{i,j}=\sin(i+j)$;
- **À faire :** travailler le cours (déterminants - réduction) et finir le DM5 pour le 19/11 ; réviser les chapitres $3-4-5-6$ (cours, TD, DM$3-4-5$) pour le DS2 du 23/11.

10 Semaine du 18/11/2024 au 17/11/2024

Le 19/11/24**, cours :** 2h**.**
- Cours (Réduction d'endomorphismes) : en dimension finie, polynôme caractéristique d'un endomorphisme, degré et coefficient dominant, spectre, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, multiplicité d'une valeur propre, comparaison avec la dimension de l'espace propre associé, cas des valeurs propres simples ; éléments propres et polynôme caractéristique d'une matrice carrée, extension des résultats vu pour les endomorphismes, exemple de recherche des éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$,calcul des ses puissances et application à un système récurrent linéaire d'ordre 1 ;
- **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 4 du cours (réduction) pour le 21/11 ; réviser les chapitres $3-4-5-6$ (cours, TD, DM$3-4-5$) pour le DS2 du 23/11.

Le 21/11/24**, cours + TD : 2h + 2h**
- Cours (Réduction d'endomorphismes) : étude du cas où 0 est v.p., du cas où la somme des coefficients des lignes est constante, du cas où la matrice est triangulaire, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et mêmes v.p. avec mêmes multiplicités, exemple (matrices semblables trigonalisables) ; diagonalisabilité d'un endomorphisme, caractérisation par l'existence d'une base de vecteurs propres, cas des homothéties, projecteurs et symétries, exemple (dan $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) ; 3 CNS de diagonalisibilité, une CN (polynôme scindé), une CS (polynôme scindé à racines simples), diagonalisabilité d'une matrice, exemple (matrices non semblables, une diagonalisable, l'autre non) ;
- Exercices $1-2$ (Compléments d'algèbre linéaire) : montrer que les matrices symétriques réelles d'ordre 2 sont diagonalisables ; dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, trouver les éléments propres d'une matrice$A$, les matrices qui commutent avec une matrice diagonale B semblable à A puis celles qui commutent avec $M\in\mathrm{Vect}(I,A)$;

— **À faire :** travailler le cours (réduction) pour le 22/11 ; réviser les chapitres $3-4-5-6$ (cours, TD, DM$3-4-5$) pour le DS2 du 23/11.

Le 22/11/24**, cours + TD :** 2h + 2h

— Cours (Réduction d'endomorphismes) : diagonalisabilité d'une matrice de rang 1 de trace non nulle, d'une matrice ayant une unique valeur propre, de A^k, A^{-1}, A^T lorsque A est diagonalisable, exemples ; trigonalisabilité d'un endomorphisme, f est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé, expression de la trace et du déterminant à l'aide des valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable, matrice trigonalisable, exemples ;

— Exercices $6-8-10$ (Réduction d'endomorphismes) : diagonaliser une matrice de permutation d'ordre 3 dans $\mathbb{C}$, en déduire la diagonalisation d'un polynôme du second degré en A ; calcul des racines carrées d'une matrice 3×3 diagonalisable à valeurs propres simples et positives ou nulles ; Montrer qu'une matrice 3×3 possède une unique valeur propre, qu'elle n'est pas diagonalisable, qu'elle est semblable à une triangulaire donnée et calculer ses puissances en l'écrivant comme somme de l'identité et d'une nilpotente ;

— **À faire :** travailler le cours et , finir l'exercice 10 et chercher l'exercice 17 du TD (réduction) pour le 26/11 ;

11 Semaine du 25/11/2024 au 01/12/2024

Le 26/11/24**, cours :** 2h.

— Correction des exercices 10 (fin) et 17 (Réduction d'endomorphismes) : calculer les puissances d'une matrice trigonalisée ; éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et diagonalisation de l'endomorphisme induit sur $\mathbb{R}_n[X]$;

— Cours (Probabilités discrètes) : cardinal d'un ensemble fini, ensemble dénombrable, au plus dénombrable, dénombrabilité de $\mathbb{N}^*$, de $\mathbb{N}^2$, de $\mathbb{Z}$, exemples d'univers dénombrables et non dénombrables en probabilité ; opérations sur les ensembles et vocabulaire probabiliste, partition et système complet d'événements, intersections et unions finies ou dénombrables ; le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable, cardinal d'un produit cartésien ; dénombrement des p-listes, des p-listes sans répétitions, des permutations, des parties à p éléments, propriétés du cardinal d'ensembles finis ;

— **À faire :** travailler le cours et chercher l'exercice 2 du cours (probabilités) pour le 27/11 ; chercher le DM6 pour le 05/12.

Le 28/11/24**, cours + TD :** 2h + 2h

— Cours (Probabilités discrètes) : exemple de dénombrement de $p-$listes avec ou sans répétotions, de parties à p éléments et autres ; probabilité sur un univers fini, propriétés, caractérisation, probabilité uniforme ; calcul de probabilités élémentaires par le dénombrement, pour des tirages successifs sans remise, avec remise puis simultanés ; notion de tribu des événements, tribus particulières, propriétés de l'union et de l'intersection finies ou dénombrables d'événements, probabilité sur un espace probabilisable, continuité croissante, décroissante, sous-additivité, calcul de probabilités d'unions et d'intersections infinies dénombrables ;

— Exercices $14-22-23$ (Réduction d'endomorphismes) : puissances, spectre et diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre n ; en dimension finie, pour un endomorphisme vérifiant $\forall x\in E, \exists p_x\in\mathbb{N}^*, f^{p_x}(x)=x$, montrer que $f^m=\mathrm{id}_E$ pour un certain entier m et que si f est diagonalisable alors $f^2=\mathrm{id}_E$; en dimension finie, pour un endomorphisme vérifiant $(f-3\mathrm{id}_E)\circ(f+2\mathrm{id}_E)=0$, on montre que f est diagonalisable ;

— **À faire :** travailler le cours et chercher l'exercice 4 du cours (probabilités) pour le 29/11 ; chercher le DM6 pour le 05/12.

Le 29/11/24**, cours + TD :** 2**h +** 2**h**

— Cours (Probabilités discrètes) : probabilité que 6 finira bien par sortir par continuité croissante ; événement quasi-certain, négligeable, système d'événements quasi-complet ; probabilité conditionnelle, premières propriétés, P_A est une probabilité, formule des probabilités composées, exemple ; formule des probabilités composées, exemple ; formules des probabilités totales, exemple ; formule de Bayes, exemple ; indépendance de deux événements, caractérisation, propriété, indépendance mutuelle, exemples ;

— Exercices $3-7$ (Probabilités discrètes) : Pour trois tirages successifs avec remise dans U_k choisie au hasard et contenant k blanches et $6-k$ noires, calcul de la probabilité d'avoir une blanche au premier tirage, aux deux premiers tirages, montrer que B_1 et B_2 ne sont pas indépendants, calculs de probabilités conditionnelles et utilisation de la formule de Bayes ; pour des lancers d'une pièce, probabilité que face ne soit jamais suivi de pile, limite et interprétation par continuité décroissante ;

— **À faire :** travailler le cours et chercher les exercices $2-6$ du TD (probabilités) pour le 03/12 ; chercher le DM6 pour le 05/12.

12 Semaine du 02/12/2024 au 08/12/2024

Le 03/12/24**, cours :** 2**h.**

— Correction des exercices $2-6$ (Probabilités discrètes) : pour une carte à gratter, probabilité d'avoir 3 pics alignés avec 3 pics et six coeurs placés au hasard, puis dans le cas où la carte peut être truquée en plaçant un pic dans la première case avec la probabilité t, probabilté que la carte soit truquée sachant qu'on a 3 pics alignés ; avec une pièce équilibrée et une truquée choisies au hasard, on consrve la pièce si on a FACE et on la change sinon, probabilité de lancer la pièce A au $n-ième$ lancer, probabilité d'avoir face au $n-ième$ lancer ;

— Cours (Probabilités discrètes) : variable aléatoire discrète, événements $(X = x)$, $(X \in A)$, $(X \leq x)$ ..., loi de X, S.C.E. associé à X, la loi de X est entièrement déterminée par les probabilités $\mathrm{P}(X = x)$, exemple (de loi à paramètre infinie), lien entre les $\mathrm{P}(X = x_n)$ et les $\mathrm{P}(X \leq x_n)$ ou les $\mathrm{P}(X \geq x_n)$; variable discrète finie de loi uniforme, de Bernoulli ou binomiale, exemples ; variable de loi de Poisson, interprétation ;

— **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 8 du cours (probabilités) pour le 05/12 ; finir le DM6 pour le 06/12.

Le 05/12/24**, cours :** 3**h**

— Cours (Probabilités discrètes) : pour un nombre X de particules aléatoire suivant une loi de Poisson, loi du nombre Z de particules détectées sachant $(X = n)$, loi de Z, loi de $X - Z$, calcul de $\mathrm{P}(X = n|Z = k)$; variable de loi géométrique, interprétation, exemple (étude de la floraison d'un oignon qui, si il fleurit une année il fleurit l'année suivante et sinon, il fleurit l'année suivante avec une probabilité p, loi de l'année de sa première floraison, loi du nombre d'oignons fleuris parmi n l'année a, loi de la première année où tous les oignons sont fleuris) ; couple de v.a.r.d., loi conjointe et lois marginales, calcul des lois marginales connaissant la loi du couple, exemple ; loi conditionnelle de X sachant A ou sachant $(Y = y)$, exemple (loi du rang N du premier Pile, puis loi du nombre de Pile si on lance N fois la pièce en calculant la loi conditionnelle, la loi du couple puis la loi marginale) ; couple de v.a.r.d. indépendantes, caractérisation par la distribution, la loi du couple de v.a.r.d. indépendantes est le produit des lois marginales, si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ aussi ; indépendance d'une famille de v.a.r.d. finie ou infinie, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors $f_1(X_1)$, ... $f_n(X_n)$ aussi, lemme des coalitions, loi d'une somme de v.a. de Bernoulli indépendantes de même paramètre, exemple (loi d'une somme de v.a. de Poisson indépendantes) ;

— **À faire :** travailler le cours (probabilités) et finir le DM6 pour le 06/12.

Le 06/12/24**, cours + TD :** 2**h +** 2**h**

- Exercice 13 (Probabilités discrètes) : pour un tirage dans une urne reconnaître une loi uniforme, pour deux tirages successifs sans remise loi du couple, lois marginales, justifier que les variables ne sont pas indépendantes, loi du max ;
- Cours (Intégrale dépendant d'un paramètre) : domaine de définition d'une intégrale à paramètre, exemples (définition, expression) ; introduction du théorème de continuité sous le signe intégrale, Étude complète d'une fonction intégrale à paramètre ;
- Exercices $16 - 19 - 20$ (Probabilités discrètes) : on choisit une boite X numérotée de 1 à n et une boule Y dans U_k numérotée de 1 à k, loi du couple, étude de l'indépendance, probabilité $\mathrm{P}(X = Y)$ et équivalent, loi de Y ; n personnes lancent une pièce, probabilité qu'au moins une ait un résultat différent des autres, loi du nombre X de lancers nécessaires pour que ça arrive ; pour X de loi de $\mathscr{P}(\lambda)$, loi et espérance de Y prenant la valeur 0 si X est impair et $X/2$ sinon ; pour X, Y i.i.d. de loi $\mathscr{G}(p)$, loi de X sachant $(X + Y = n)$;
- **À faire :** travailler le cours et chercher l'exercice 4 du cours (intégration) pour le 10/12 ; chercher le DM7 pour le 17/12.

13 Semaine du 09/12/2024 au 15/12/2024

Le 10/12/24**, cours :** 2**h.**

- Cours (Intégrale dépendant d'un paramètre) : étude de la continuité d'une intégrale à paramètre par une domination locale, cas d'une intégrale sur un segment et limite d'une suite d'intégrale par changement de variable et continuité ; dérivées partielles d'ordre 1, exemples ; théorème de dérivation sous le signe intégrale, passage par une domination locale, exemple (fonction intégrale à paramètre solution d'une EDL1 que l'on résout) ;
- **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 6 du cours (intégration), finir l'exercice 17 du TD8 (probabilités) pour le 12/12 ; chercher le DM7 pour le 17/12.

Le 12/12/24**, cours + TD :** 2**h +** 2**h**

- Cours (Intégrale dépendant d'un paramètre) : résolution d'une EDL1 pour expliciter une intégrale à paramètre ; exemple de série de fonction, domaine de convergence (définition), intégrabilité et intégrale des fonctions sommées, divergence de la série des intégrales, théorème d'intégration terme à terme, exemple ;
- Cours (Séries entières) : définition d'une série entière et de son domaine de convergence, cas des séries géométriques ; lemme d'Abel, rayon de convergence, illustration, caractérisation du rayon de convergence, cas particuliers $R = 0$ et $R = +\infty$, exemples ;
- Exercices $17 - 22$ (Probabilités discrètes) : la loi d'un couple dépendant d'un paramètre, calculer la somme double, en déduire la valeur du paramètre, déterminer les lois marginales, si les v.a. sont indépendantes, et $\mathrm{P}(X = Y)$; déterminer la probabilité qu'une matrice 2×2 soit diagonalisable, ses coefficients dépendant de deux v.a. géométrique indépendantes ;
- **À faire :** travailler le cours (intégration, séries entières) et chercher l'exercice 1 du TD9 pour le 13/12 ; chercher le DM7 pour le 17/12.

Le 13/12/24**, cours + TD :** 2**h +** 2**h**

- Correction de l'exercice 1 (Intégrale dépendant d'un paramètre) : montrer qu'une intégrale à paramètre est définie sur $]-1, +\infty[$, $\mathscr{C}^1$ et déterminer un équivalent en 0 ;
- Cours (Séries entières) : rayon de convergence et domaine de convergence de la série entière de coefficients $a_n = (-1)^n/n$; intervalle ou disque ouvert de convergence, exemple et point méthode pour le calcul du rayon de convergence, rayons de convergence de $\sum z^n/n!$ et $\sum n^\alpha z^n$;

comparaison de séries entières par les relation $|a_n| \leq |b_n|$, $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ et $a_n \sim b_n$, rayon de $\sum na_n z^n$, exemples ; convergence et somme de la somme de deux séries entières, exemple ;
- Exercices $4-10$ (Intégrale dépendant d'un paramètre) : montrer que la transformée de Fourier d'une gaussienne est définie continue, bornée sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^1$, solution d'une EDL1, en déduire que c'est aussi une gaussienne, qu'elle est $\mathscr{C}^\infty$ et calculer ses dérivées $n-ième$;
- **À faire :** travailler le cours et chercher l'exercice 4 du cours (séries entières), chercher l'exercice 17 1.a) du TD9 pour le 17/12 ; chercher le DM7 pour le 20/12.

14 Semaine du 16/12/2024 au 22/12/2024

Le 17/12/24**, cours :** 2h.
- Correction de l'exercice 17 1.a) (Intégrale dépendant d'un paramètre) : intégration terme à terme pour écrire une intégrale comme somme d'une série numérique ;
- Cours (Séries entières) : exemple (deux séries entières qui ont même rayon de convergence et dont la somme a un rayon différent) ; convergence et somme du produit de Cauchy de deux séries entières, exemple ; intervalle de définition de la somme d'une série entière de la variable réelle, théorème de continuité, théorème de dérivation terme à terme, classe $\mathscr{C}^\infty$, rayon de convergence et somme des séries dérivées, relation avec les coefficients, exemple (série entière dont la somme est continue sur $[-1, 1]$ et $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$) ; primitivation terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence, intégration terme à terme sur un segment, exemple (écrire une intégrale de Gauss sur $[0, 1]$ comme somme d'une série) ; fonction développable en série entière ;
- **À faire :** travailler le cours et chercher l'exercice 8 du cours (séries entières), chercher l'exercice 17 1.b) du TD9 pour le 19/12 ; finir le DM7 pour le 20/12.

Le 19/12/24**, cours + TD : 2h + 2h**
- Correction de l'exercice 17 1.b) (Intégrale dépendant d'un paramètre) : intégration terme à terme pour écrire une intégrale comme somme d'une série numérique ;
- Cours (Séries entières) : exemple (décomposer une fraction en éléments simple pour obtenir un DSE) ; une fonction DSE est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 et son DSE est son développement en série de Taylor, une fonction DSE admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, réciproque fausse, exemples (le prolongement en 0 du sinus cardinal est DSE donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, fonction $\mathscr{C}^\infty$ non DSE) ; caractérisation d'un DSE par la formule de Taylor avec reste intégral, unicité du DSE, exemple (recherche d'une solution DSE d'une équation différentielle linéaire) ;
- Exercices 17 1.c) (fin), 12 (Intégrale dépendant d'un paramètre) : intégration terme à terme pour écrire des intégrales comme sommes de séries numériques ; montrer qu'une fonction intégrale à paramètre est définie, paire, $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, solution d'une EDL2 à coefficients variables, en déduire un DSE ;
- Exercice 1 (Séries entières) : calculer le rayon de convergence de séries entières, point méthodes ;
- **À faire :** travailler le cours (séries entières) et finir le DM7 pour le 20/12.

Le 20/12/24**, cours + TD : 2h + 2h**
- Cours (Séries entières) : DSE des fonctions paires et impaires, DSE usuels, exemples de recherche de DSE ; série géométrique complexe, série exponentielle complexe comme DSE de la fonction exponentielle complexe introduite en première année, propriétés, exemple ;
- Exercice 4 1., 18 (Séries entières) : rayon de convergence et somme de séries entières ; rayon de convergence d'une série entière ;

— **À faire :** reprendre le DS2 (comprendre les erreurs faites et travailler ce qui n'a pas été fait, noter des questions pour la rentrée si nécessaire) ; travailler les chapitres $7-8$ et reprendre les DM$6-7$; travailler les chapitres $9-10$ et chercher le DM8 pour le 07/01/2025 ; le DS3 du 11/01/2025 portera sur les chapitres $7-8-9-10$; bon repos, bon travail et bonne fin d'année à tous.

15 Semaine du 06/01/2025 au 12/01/2025

Le 07/01/25, cours : 2h.

— Correction de l'exercice 18 (fin) (Séries entières) : montrer que la somme d'une série entière est solution d'une EDL1, la résoudre ;
— Exercice 17a) (Séries entières) : chercher la solution DSE d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2 à coefficients variables ;
— Cours (Espaces préhilbertiens réels) : rappels sur le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ et la norme associée, définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel, premières propriétés, espaces préhilbertiens et euclidiens, produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, produits scalaires usuels sur $\mathscr{C}^0([a,b])$;
— **À faire :** travailler le cours (produit scalaire), finir l'exercice 17 du TD10 pour le 09/01 ; réviser les chapitres $7-8-9-10$ pour le DS3 du 11/01.

Le 09/01/25, cours + TD : 2h + 2h

— Correction de l'exercice 17b) (Séries entières) : chercher la solution DSE d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2 à coefficients variables ;
— Cours (Espaces préhilbertiens réels) : produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}[X]$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, exemples ; norme associée à un produit scalaire, vecteur unitaire, distance entre deux vecteurs, identité remarquable et identité de polarisation associée, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, applications dans $\mathscr{C}^0([a,b]$, exemple (dans $\mathbb{R}^n$) ;
— Exercices $8-12$ (Séries entières) : développer des fonctions en série entière ; développer une fonction pour intégrer terme à terme et écrire une intégrale comme somme d'une série ;
— **À faire :** travailler le cours (produit scalaire) pour le 10/01 ; réviser les chapitres $7-8-9-10$ pour le DS3 du 11/01.

Le 09/01/25, cours + TD : 2h + 2h

— Cours (Espaces préhilbertiens réels) : propriétés de la norme, inégalité triangulaire et cas d'égalité, propriété de la distance (séparaton et inégalité triangulaire) ; vecteurs et s.e.v. orthogonaux, exemple (dans $\mathbb{R}^3$) ; orthogonal d'un s.e.v., propriétés de l'orthogonal d'un s.e.v., cas d'un s.e.v. de dimension finie, exemple (dans $\mathbb{R}_2[X]$) ; famille orthogonale, famille orthonormale ;
— Exercice 6 (Séries entières) : convergence et somme de séries numériques ;
— Exercices $1-2$ (Espaces préhilbertiens réels) : produits scalaires dans des espaces de polynômes et dans $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$; application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)$; montrer qu'une application f est un endomorphisme d'un espace euclidien, trouver son noyau et son image, montrer qu'ils sont supplémentaire, écrire la matrice de f dans une base adaptée ;
— **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 19 du TD 11 (produit scalaire) pour le 14/01 ;

16 Semaine du 13/01/2025 au 19/01/2025

Le 14/01/25**, cours :** 2**h.**

- Correction de l'exercice 19 (Espaces préhilbertiens réels) : montrer qu'une application f est un endomorphisme d'un espace euclidien, trouver son noyau et son image, montrer qu'ils sont supplémentaire, écrire la matrice de f dans une base adaptée, montrer qu'il est diagonalisable ;
- Cours (Espaces préhilbertiens réels) : exemple de famille orthogonales et orthonormée (base de Fourier de $\mathscr{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$; théorème de Pythagore et généralisation, liberté d'une famille orthogonales de vecteurs non nuls, exemple de construction d'une BON de $\mathbb{R}^3$ adaptée à un plan défini par une base quelconque ;
- **À faire :** travailler le cours jusqu'au théorème 5 et chercher l'exercice 7 du cours (produit scalaire) pour le 16/01 ; chercher le DM9 pour le 24/01.

Le 16/01/25**, cours + TD :** 2**h +** 2**h**

- Cours (Espaces préhilbertiens réels) : algorithme de Gram-Schmidt, existence d'une BON dans un espace euclidien, exemple (dans $\mathbb{R}_2[X]$) ; expression des coordonnées d'un vecteur, du produit scalaire et de la norme dans une BON, écriture matricielle de ces relations, expression des coefficients de la matrice d'un endomorphisme dans une BON ; si F est un s.e.v. de dimension finie alors $E = F \oplus F^{\perp}$, définition d'un projecteur orthogonal et expression en BON de F, projection sur une droite, exemple (sur un plan de $\mathbb{R}^3$) ; propriétés du supplémentaire orthogonal de F dans E euclidien, cas d'un hyperplan (défini par une équation ou un vecteur normal), exemple ; méthodes de calcul d'un projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie, théorème de minimisation des distances, inégalité de Bessel, exemple de minimisation de la valeur d'une intégrale ;
- Exercices 3 (Espaces préhilbertiens réels) : montrer qu'une application sur $(\mathbb{R}^2)^2$ est un produit scalaire, non canonique, puis construire une BON pour ce produit scalaire ; déterminer la matrice dans la base canonique d'un projecteur orthogonal sur un plan de $\mathbb{R}^4$ défini par des équations linéaires ;
- **À faire :** travailler le cours et chercher l'exercice 10 du TD11 (produit scalaire) pour le 17/01 ; chercher le DM9 pour le 24/01.

Le 17/01/25**, cours + TD :** 2**h +** 2**h**

- Correction de l'exercice 10 (Espaces préhilbertiens réels) : déterminer la matrice dans la base canoique d'un projecteur orthogonal sur un plan de $\mathbb{R}^4$ défini par des équations linéaires ;
- Cours (isométrie d'un espace euclidien) : définition d'une isométrie par la conservation de la norme, exemples dans $\mathbb{R}^2$; valeurs propres réelles d'une isométries vectorielles, une projection orthogonale n'est pas une isométrie ; caractérisation par la conservation du produit scalaire, conservation de l'orthogonalité, orthogonalité de $E_{-1}(f)$ et $E_1(f)$, caractérisation par la conservation des bases orthonormales, exemple (et méthode) ; définition et propriétés du groupe orthogonal, endomorphisme induit et stabilité de $F^{\perp}$ si F est stable ;
- Exercices $4-7-8$ (Espaces préhilbertiens réels) : pour une matrice inversible montrer que $\varphi(X,Y) = X^T A^T A Y$ est un p.s. de $\mathbb{R}^n$, que $(A^{(-1)}e_1, \ldots, A^{(-1)}e_n)$ est une BON de $\mathbb{R}^n$ et écrire les coordonnées d'un vecteur dans cette base ; propriété caractéristique des BON par l'expression du carré de la norme d'un vecteur ; dans $\mathbb{R}^3$ distance d'un vecteur à un plan défini par une équation linéaire, expression et matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur ce plan ;
- **À faire :** travailler le cours (isométries) et chercher l'exercice 12 du TD11 (produit scalaire) pour le 21/01 ; chercher le DM9 pour le 24/01.

17 Semaine du 20/01/2025 au 26/01/2025

Le 21/01/25**, cours :** 2h**.**

— Correction de l'exercice 12 (Espaces préhilbertiens réels) : projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour déterminer la meilleure approximation de l'exponentielle en moyenne quadratique sur $[-1, 1]$, interprétation géométrique et comparaison avec la partie régulier du $DL_2(0)$;

— Cours (isométrie d'un espace euclidien) : symétrie orthogonale et réflexion, expression d'une réflexion, exemples de symétrie orthogonale p/r à une droite de $\mathbb{R}^3$ et de réflexion de $\mathbb{R}^3$ (et méthodes) ; une symétrie est orthogonale ssi c'est une isométrie ; matrices orthogonales, définition, caractérisation d'une matrice orthogonale par les colonnes ou les lignes et propriétés du groupe orthogonal $O(n)$;

— **À faire :** travailler le cours (isométries) pour le 23/01 ; chercher le DM9 pour le 24/01.

Le 23/01/25**, cours + TD :** 2h **+** 2h

— Cours (isométrie d'un espace euclidien) : caractérisation matricielle des isométries, déterminant d'une matrice orthogonale ou d'une isométrie, groupe spécial orthogonal, isométrie directe ou indirecte, propriétés du groupe spécial orthogonal $SO(n)$, cas des symétries et réflexion, exemple dans $\mathbb{R}^4$; caractérisation matricielle d'un changement de base orthonormale, orientation d'un espace euclidien, base directe ou indirecte, illustration dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$, lien avec le produit mixte de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$; classification des matrices orthogonales et des isométries de $\mathbb{R}^2$, définition géométrique d'une rotation de $\mathbb{R}^2$, caractérisation complexe et matricielle, exemples ; rotation d'un plan euclidien et angle entre deux vecteurs, propriétés des rotations en dimension 2, classification des isométries en dimension 2, composées de deux isométries en dimension 2 ;

— Exercices $1-2$ (isométrie d'un espace euclidien) : déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ d'une réflexion connaissant une équation de l'hyperplan ; construire une BON de $\mathbb{R}^3$ adaptée à une droite définie par deux équations linéaire, matrice dans la base canonique d'un retournement, matrice dans une BON adaptée, décomposition en deux réflexions ;

— **À faire :** travailler le cours (isométries), finir le DM9 pour le 24/01 ;

Le 24/01/25**, cours + TD :** 2h **+** 2h

— Cours (isométrie d'un espace euclidien) : description du groupe spécial orthogonal de $\mathbb{R}^3$, définition géométrique d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ autour d'un axe D orienté, matrice dans une BOND adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = D \oplus D^\perp$; exemple de détermination de la matrice dans la base canonique d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe orienté par un vecteur donné et d'angle donné, expression vectorielle d'une rotation de $\mathbb{R}^3$, application pour retrouver la matrice dans la base canonique ; orientation d'une droite et d'un plan, et rotation d'un espace euclidien de dimension 3, exemples et point méthode ; matrice symétrique réelle, symétrie orthogonale $M \mapsto M^T$, structure et orthogonal de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, les espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux deux à deux, théorème spectral, exemple de diagonalisation de matrices symétriques réelles d'ordres 2 et 3 en BOND ;

— Exercices 7 (isométrie d'un espace euclidien) : matrice dans la base canonique d'une rotation définie par un axe orienté par un vecteur et l'angle ;

— **À faire :** travailler le cours et chercher les exercices $4-7$ du TD12 (isométries) pour le 28/01 ;

18 Semaine du 27/01/2025 au 02/02/2025

Le 28/01/25**, cours :** 2h**.**

- Correction des exercices 7 (fin) et 4 (isométrie d'un espace euclidien) : matrice dans la base canonique d'une rotation définie par un axe orienté par un vecteur et l'angle ; identifier des isométries de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ connaissant les matrices dans la base canonique ;
- Cours (espérance et variance d'une v.a.r.d.) : espérance d'une v.a.r.d. discrète infinie, finie, constante, exemple (cas fini), cas des lois usuelles ; si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ alors $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X \geq n)$, exemple (pour un maximum de v.a.r.d. i.i.d.) ;
- **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 1 du cours (probabilités) pour le 30/01 ; chercher le DM10 pour le 07/02.

Le 30/01/25**, cours + TD :** 2h + 2h

- Cours (espérance et variance d'une v.a.r.d.) : théorème de transfert, inégalité de Markov, interprétation, exemple (inégalité de Markov exponentielle pour une loi de Poisson) ; linéarité, positivité, croissance de l'espérance, variable centrée, comparaison $|X| \leq Y$ avec Y d'espérance finie, si $X \geq 0$ et $\mathrm{E}(X) = 0$ alors $\mathrm{P}(X = 0) = 1$, exemple ; si X^2 est d'espérance finie alors X aussi, variance et écart-type, formule $V(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$, exemple de comparaison de deux stratégies par l'espérance et la variance, notion de risque, variance des lois usuelles ;
- Exercices $5-10-22$ (isométrie d'un espace euclidien) : montrer qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est une isométrie indirecte, que -1 est v.p., que sa composée avec la symétrie orthogonale p/r à $E_{-1}(f)$ est une rotation, préciser la nature de f ; justifier que l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice symétrique réelles d'ordre 3 est diagonalisable, que ses espaces propres sont orthogonaux et reconnaitre une projection orthogonale, la diagonaliser en BON ; montrer qu'une application à paramètre non nul est un endomorphisme d'un espace euclidien, qu'il vérifie $(f(x)|y) = (x|f(y))$, qu'il est diagonalisable ;
- **À faire :** travailler le cours (probabilités) et finir l'exercice 22 du TD12 (isométries) pour le 31/01 ; chercher le DM10 pour le 07/02.

Le 31/01/25**, cours + TD :** 2h + 2h

- Cours (espérance et variance d'une v.a.r.d.) : inégalité de Bienaymé-Tchebychev, interprétation, exemple (intervalle de confiance à 95% pour une loi géométrique) ; effet d'un changement affine sur la variance, homogénéité de l'écart-type, variable centrée réduite ; si X^2 et Y^2 sont d'espérances finies alors XY aussi, théorème de transfert pour XY, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité ; covariance de deux v.a.r.d., expression $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, exemple et interprétation du signe d'une covariance ; symétrie, bilinéarité et positivité de la covariance, identité remarquable $V(X + Y) = V(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$, variables décorrélées, si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ (réciproque fausse), exemple et contre-exemple ;
- Correction de l'exercice 22 (fin) (isométrie d'un espace euclidien) : éléments propres d'un endomorphisme symétrique particulier, déterminer la valeur du paramètre pour qu'il soit une isométrie, reconnaitre alors une réflexion ;
- Exercices $5 - 9 - 10$ (espérance et variance d'une v.a.r.d.) : loi du min et max de deux lois uniformes indépendantes, espérance et variance de l'une pour en déduire celles de l'autre ; connaissant la loi d'un couple, déterminer la loi et l'espérance de chaque coordonnée ; retrouver une loi de probabilité vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux, son espérance et sa variance ;
- **À faire :** travailler le cours (probabilités) pour le 04/02 ; chercher le DM10 pour le 07/02.

19 Semaine du 03/02/2025 au 09/02/2025

Le 04/02/25**, cours : 2h.**

— Cours (espérance et variance d'une v.a.r.d.) : famille de v.a.r.d., loi de $(X_1, \ldots, X_n)$, espérance et variance de la somme (cas des variables décorréllées deux à deux), exemple ; si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors $E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$ et $V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$, loi d'une somme de v.a. de Bernoulli indépendantes de même paramètre et calcul de l'espérance et de la variance d'une binomiale ; loi faible des grands nombres (résultat asymptotique et non asymptotique), exemple ; fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$, fonctions génératrices des lois usuelles ;

— **À faire :** travailler le cours (probabilités) pour le 06/01 ; finir le DM10 pour le 07/02.

Le 06/02/25**, cours + TD : 2h + 2h**

— Cours (espérance et variance d'une v.a.r.d.) : rayon $R_X \geq 1$, valeur de $G_X(1)$, expression comme espérance de t^X, classe $\mathscr{C}^\infty$ de G_X et caractérisation de la loi de X par sa fonction génératrice, fonction génératrice de la somme de n variables indépendantes, exemples (avec une loi géométrique, des lois binomiales et des lois de Poisson) ; existence et expression de l'espérance et de la variance en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$, exemples (lois usuelles) ;

— Cours (Fonctions de plusieurs variables) : boules ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne, point intérieur, extérieur ou adhérent à une partie de $\mathbb{R}^2$, frontière, exemples ; partie ouverte, fermée et/ou bornée de $\mathbb{R}^2$, exemples ;

— Exercices $13-16-17$ (espérance et variance d'une v.a.r.d.) : pour des v.a. X_k iid de valeurs ± 1, loi et espérance de $Z_n = X_1 \cdots X_n$, covariance de Z_n et Z_{n+1} ; pour deux vard indépendantes de même loi donnée, calcul de la fonction génératrice, de l'espérance, de la variance, fonction génératrice loi et espérance de la somme ; application de l'inégalité de $B-T$ pour des inégalités de concentration et de la convergence en probabilité ;

— **À faire :** travailler le cours (probabilités : séries génératrices ; fonctions de deux variables : le paragraphe 1.1) et finir le DM10 pour le 07/02.

Le 07/02/25**, cours : 2h + 2h.**

— Cours (Fonctions de plusieurs variables) : définition d'une fonction réelle de deux variables, surface représentative et lignes de niveau, exemples ; extremum global et local, introduction de la notion de point col, exemples ; définition d'une fonction réelle de deux variables, surface représentative et lignes de niveau, exemples ; extremum global et local, introduction de la notion de point col, exemples ; limite en un point adhérent d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, continuité en un point, sur une partie, théorèmes généraux, si une fonction de deux variables est continue alors ses fonctions partielles sont continues (réciproque fausse), exemples (fonction prolongeable et fonction non prolongeable par continuité en $(0,0)$) ; description d'ouverts et de fermés par des fonctions continues, exemples ; théorème des bornes atteintes et application à l'étude de la continuité d'une fonction intégrale (sur un segment) à paramètre ; dérivées partielles, fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert ;

— Exercices 17 (fin) et 18 (espérance et variance d'une v.a.r.d.) : application de l'inégalité de $B-T$ pour des inégalités de concentration et de la convergence en probabilité ; application de l'inégalité de $B-T$ puis de Markov pour développer une inégalité de concentration et obtenir une majoration exponentielle ;

— Exercices 1 (Fonctions de plusieurs variables) : Pour plusieurs fonctions, déterminer son domaine de définition, le représenter et déterminer si il est ouvert, fermé, borné ;

— **À faire :** travailler le cours et chercher l'exercice 5 du TD14 (fonctions de deux variables) pour le 04/03 ;

Conseils pour réviser le concours blanc :

En priorité, bien apprendre le formulaire et relire le cours de tous les chapitres en reprenant les exemples, exercices et démonstrations qu'il vous semble nécessaire de reprendre.

Pour planifier les révisions et s'entrainer (priorité aux DS si vous manquez de temps) :

Épreuve du mercredi 26 février (8h-12h), Analyse et géométrie :

1. Chapitres $1-2$: Problème de géométrie du DS1,

   Problèmes $2-3$ du DM1, Problèmes $1-2$ du DM2 ;
2. Chapitres $3-4$: Problème d'Analyse du DS1, Problème d'Analyse du DS2,

   Problèmes $2-3$ du DM3, Problèmes $1-2-3$ du DM4 ;
3. Chapitres $9-10$: Problème d'Analyse du DS3,

   Problèmes $2-3$ du DM8 ;

Épreuve du vendredi 28 février (8h-12h), Algèbre et probabilités :

1. Chapitres $5-6-7$: Problème d'Algèbre du DS2, Exercice d'Algèbre du DS3,

   Problèmes $1-2-3$ du DM5, Problèmes $1-2$ du DM6 ;
2. Chapitres $11-12$: Problèmes 2 du DM9, Problèmes $1-2$ du DM10,

   exercices $4-9-13$ du TD11, exercices $4-7-9-21-22$ du TD12 ;
3. Chapitres $8-13$: Exercice de Probabilités du DS3,

   Problème 3 du DM6, Problèmes $1-2-3$ du DM7, Problème 3 du DM10,

   exercices $6-7-14-15-17-19$ du TD13.

20 Semaine du 03/03/2025 au 09/03/2025

Le 04/03/25**, cours :** 2**h.**

— Correction de l'exercice 5 (Fonctions de plusieurs variables) : recherche des fonctions de gradient connu ;

— Cours (Fonctions de plusieurs variables) : exemple de prolongement qui admet des dérivées partielles en tout point, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ mais pas sur $\mathbb{R}^2$; formule de Taylor-Young à l'ordre 1, gradient et expression vectorielle du DL d'ordre 1, meilleure approximation affine d'une fonction $\mathscr{C}^1$, équation d'un plan tangent, exemple ; condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert, exemple ;

— **À faire :** travailler le cours, finir l'exercice 6 du cours et chercher le 3 du TD14 (fonctions de deux variables) pour le 06/03 ;

Le 06/03/25**, cours + TD :** 2**h +** 2**h**

— Correction de l'exercice 3 (Fonctions de plusieurs variables) : déterminer une équation d'un plan tangent à une surface d'équation $z = f(x, y)$ et un vecteur normal ;

— Cours (Fonctions de plusieurs variables) : exemple d'analyse de la nature des points critique d'une fonction polynomiale en étudiant le signe de $f(a + u) - f(a)$ (un minimum local et un point col) ; dérivées partielles secondes, fonction de classe $\mathscr{C}^2$, théorèmes généraux pour la classe $\mathscr{C}^2$, théorème de Schwarz, exemple ; extension aux fonctions de trois variables ; formule de Taylor-Young à l'ordre deux, matrice Hessienne d'une fonction $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert, expression vectorielle du DL d'ordre 2, étude de la nature d'un point critique par le déterminant et la trace de la matrice Hessienne, exemple de recherche d'extremums sur un ouvert et sur un fermé borné, point méthode ;

— Exercices $7 - 13$ 1. (Fonctions de plusieurs variables) : montrer qu'un prolongement en $(0, 0)$ est continu et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, mais pas $\mathscr{C}^2$; recherche des extrema d'une fonction polynomiale dans $\mathbb{R}^2$, et sur un fermé borné de $\mathbb{R}^2$;

— **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 13 du TD14 (fonctions de deux variables) pour le 07/02.

Le 07/03/25**, cours + TD :** 2**h +** 2**h**

— Cours (Fonctions de plusieurs variables) : dérivée de $t \mapsto f(x(t), y(t))$, expression vectorielle et interprétation cinématique, dérivée selon un vecteur ; fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, fonctions coordonnées, limite et continuité, caractérisation par les coordonnées, caractérisation de la classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$ par les coordonnées, règle de la chaine généralisée, application au passage en coordonnées polaires et à la résolution d'EDP classiques ;

— Cours (Compléments sur les courbes planes) : courbe définie par une équation cartésienne $f(x, y) = 0$, point régulier, exemples ;

— Correction de l'exercice 13 2. (Fonctions de plusieurs variables) : recherche des extrema d'une fonction trigonométrique dans $\mathbb{R}^2$, et sur un fermé borné de $\mathbb{R}^2$;

— Exercices $19-20$ (Fonctions de plusieurs variables) : résolution d'une EDP d'ordre 1 en passant en polaire ; résolution d'une EDP d'ordre 1 par le changement $(u, v) = (xy, x/y)$;

— **À faire :** travailler le cours (fonctions de deux variables, courbes planes) pour le 08/02.

Le 07/03/25**, cours :** 2**h**

— Cours (Compléments sur les courbes planes) : en un point régulier la courbe admet une tangente de vecteur normal $\vec{\nabla} f(M_0)$, exemple et application aux lignes de niveau, le gradient est orienté dans les sens des valeurs croissante de f ; définition géométrique des coniques, exemple et méthode pour obtenir une équation réduite, un paramétrage et les éléments géométriques d'une parabole, d'une ellipse et d'une hyperbole ;

— **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 4 du cours (courbes planes) pour le 11/02 ; réviser les chapitres 13, 14 et la partie 1. du chapitre 15 (cours et TD) pour le DS6 du 15/03.

21 Semaine du 10/03/2025 au 16/03/2025

Le 11/03/25**, cours + TD : 2h + 1h**

— Cours (Compléments sur les courbes planes) : exemple de calcul d'une équation réduite et des éléments géométrique d'une hyperbole à partir de la définition géométrique (foyer et directrice oblique) ; caractérisation des coniques par l'équation cartésienne, exemples sans terme croisé ; méthode d'identification d'une courbe définie par une équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, exemple (de réduction de l'équation d'une conique pour déterminer sa nature, ses éléments géométriques et la tracer) ; détermination de la nature d'une conique (éventuellement dégénérée) par le déterminant de la matrice symétrique réelle associée ;
— Exercice 15 (Fonctions de plusieurs variables) : étude d'une fraction rationnelle de deux variables, classe $\mathscr{C}^2$, points critiques, nature des points critiques (droite de points critiques) ;
— Exercices 1 (Compléments sur les courbes planes) : équation de la tangente à la ligne de niveau d'une fonction polynomiale passant par un point donné ;
— **À faire :** travailler le cours, chercher l'exercice 4 du TD15 (courbes planes) pour le 13/03 ; réviser les chapitres 13, 14 et la partie 1. du chapitre 15 (cours et TD) pour le DS6 du 15/03.

Le 13/03/25**, cours + TD : 3h + 1h**

— Correction de l'exercice 4 (Compléments sur les courbes planes) : montrer que qu'une courbe définie par une équation polynomiale de degré 2 est régulière, donner une équation de la tangente en un point donné, déterminer ses points en lesquels la tangente passe par l'origine ; nature d'une courbe plane, réduction de l'équation et tracé (d'une hyperbole) ;
— Cours (Compléments sur les courbes planes) : longueur d'une courbe paramétrée régulière, cas d'une courbe représentative d'une fonction, exemple (arc de parabole et cardioïde) ; abscisse curviligne, interprétation géométrique, cas du cercle trigonométrique, propriétés ; repère de Frenet, définition de la courbure et premières formules de Frenet, exemple ;
— Exercice $8-13$ (Compléments sur les courbes planes) : étude d'une courbe paramétrée, de ses branches infinies, détermination d'une équation cartésienne, nature géométrique, réduction de l'équation, détermination d'un deuxième paramétrage par changement de repère ; pour une famille de coniques $\mathscr{C}_m$ dépendant d'un paramètre, montrer que $\mathscr{C}_6$ est une ellipse, $\mathscr{C}_{12}$ une droite, les tracer, montrer que toutes ces coniques ont exactement deux points commun, déterminer les valeurs de m pour lesquelles elles sont une ellipse, une hyperbole, une parabole ;
— **À faire :** travailler le cours (courbes planes) pour le 14/03 ; réviser les chapitres 13, 14 et la partie 1. du chapitre 15 (cours et TD) pour le DS6 du 15/03.

Le 14/03/25**, cours + TD : 3h + 1h**

— Cours (Compléments sur les courbes planes) : théorème de relèvement, expression angulaire de la courbure, interprétation cinématique, exemple ; calcul de la courbure en un point d'un cercle de centre O de rayon R, lien entre courbure et rayon, définition du rayon de courbure, du centre de courbure et du cercle de courbure en un point birégulier, développée d'une courbe régulière de classe $\mathscr{C}^2$, caractérisation comme enveloppe de la famille des normales, exemple et point méthode ;
— Exercice $2-17-19$ (Compléments sur les courbes planes) : tangente et normale à une parabole d'équation $y^2 = 2px$, projeté orthogonal de $F(p/2, 0)$ sur la normale en M ; étude des points stationnaires d'une courbe plane, calcul de la longueur de la courbe entre ces deux points stationnaires ; abscisse curviligne d'une spirale logarithmique ;

— **À faire :** travailler le cours, finir l'exercice 19 et chercher l'exercice 20 du TD15 (courbes planes) pour le 18/03 ; réviser les chapitres 13, 14 et la partie 1. du chapitre 15 (cours et TD) pour le DS6 du 15/03.

22 Semaine du 17/03/2025 au 23/03/2025

Le 18/03/25**, cours : 2h.**

— Correction des exercices 19 (fin) et 20 (Compléments sur les courbes planes) : abscisse curviligne d'une spirale logarithmique, repère de Frenet, courbure, rayon de courbure et développée ; expression angulaire du vecteur tangent unitaire et de la courbure en un point régulier,calcul de la courbure par la première formule de Frenet, point méthode ;

— Cours (Courbes et surfaces de l'espace) : définition géométrique du produit scalaire, du produit vectoriel, du produit mixte, expression en base orthonormée directe, caractérisation de l'orthogonalité, de la colinéarité et de la coplanarité ; différents mode de représentation des plans, exemple ; différents mode de représentation des droites, exemple (projeté orthogonal d'un point sur une droite) ; distance d'un point à un plan ou à une droite, méthode de calcul du projeté orthogonal d'un point sur un plan ou une droite, projection sur les plans de coordonnées, équation cartésienne d'une sphère, section plane d'une sphère, exemple (équations, centre et rayon d'un cercle de l'espace) ;

— **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 3 du cours (espace) pour le 20/03 ; chercher le DM11 pour le 28/03.

Le 20/03/25**, cours + TD : 2h + 2h**

— Cours (Courbes et surfaces de l'espace) : projection orthogonale d'un cercle contenu dans un plan incliné sur un plan de coordonnées, paramétrage de l'ellipse puis du cercle ; courbe paramétrée de l'espace, courbe plane, courbe gauche, interprétation géométrique et cinématique, point régulier ou stationnaire, courbe régulière, tangente en un point régulier, exemple ; surface ou nappe paramétrée, interprétation géométrique, courbes coordonnées, exemple (détermination et représentation des courbe coordonnées d'une nappe paramétrée et de ses intersections avec les plans de coordonnées) ; point régulier d'une surface paramétrée, plan tangent et droite normale en un point régulier, exemple et détermination d'une équation cartésienne ;

— Exercice $2-3$ (Courbes et surfaces de l'espace) : identifier un plan et une droite et déterminer la projection orthogonale de la droite sur le plan et sa projection sur le plan parallèlement à une droite sécante non perpendiculaire ; montrer qu'une droite définie par des équations cartésiennes et une droite définie par un paramétrage sont non coplanaires, et déterminer laquelle des deux est la plus proche d'un point donné ;

— **À faire :** travailler le cours (surfaces) pour le 21/03 ; chercher le DM11 pour le 28/03.

Le 21/03/25**, cours + TD : 2h + 1h**

— Cours (Courbes et surfaces de l'espace) : la surface représentative d'une fonction de deux variable est régulière, équation d'un plan tangent, position relative, exemples ; surface définie par une équation cartésienne (implicite), point régulier, plan tangent en un point régulier, lorsqu'il est non nul le gradient est normal aux surfaces de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de F, exemple (plans tangents, section par les plans de coordonnées) ; courbe tracée sur une surface définie par une équation cartésienne ou un paramétrage ;

— Exercice $10-11-16$ (Courbes et surfaces de l'espace) : montrer qu'un point d'une nappe paramétrée est régulier et déterminer le plan tangent en ce point, déterminer une équation cartésienne de la surface, étudier son intersection avec les plans de coordonnées ; montrer que l'ensemble des points stationnaires d'une surface paramétrée est une cours gauche, déterminer la tangente à cette courbe en chaque point, déterminer le plan tangent à la surface en ses points réguliers ; déterminer les plans tangents à une surface définie par une équation cartésienne orthogonaux à une droite donnée

— **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 16 du TD16 (surfaces) pour le 25/03 ; chercher le DM11 pour le 28/03.

23 Semaine du 24/03/2025 au 30/03/2025

Le 25/03/25, cours : 2h.

— Correction de l'exercice 16 (fin) (Courbes et surfaces de l'espace) : équations des plans tangents à une surface parallèles à un plan donné ou contenant une droite donnée ;

— Cours (Courbes et surfaces de l'espace) : exemple de courbe définie comme intersection d'une quadrique et d'un plan, équation dans un repère adapté au plan, paramétrage dans le repère d'origine ; en un point régulier sur la courbe et sur la surface la tangente à la courbe est incluse dans le plan à la surface, courbe définie par deux équations cartésiennes, point régulier, tangente en un point régulier, exemple ; surfaces réglées, illustrations, exemple (surface réglée définie par une équation) ;

— **À faire :** travailler le cours et finir l'exercice 11 du cours (espace) pour le 27/03 ; chercher le DM11 pour le 28/03.

Le 27/03/25, cours + TD : 2h + 2h

— Cours (Courbes et surfaces de l'espace) : exemple de surfaces réglées (définie par une équation cartésienne ou la famille des génératrices), le plan tangent à une surface réglée en M_0 contient la génératrice passant par ce point ; surface de révolution, axe de révolution, cercles parallèles, plan méridien, courbes méridiennes, exemples (paramétrage et équation d'un hyperboloïde de révolution à une nappe et d'un tore) ; équation cartésienne et paramétrage d'une sphère et d'un cylindre de révolution, exemple (étude d'une ellipse intersection d'un cylindre et d'un plan incliné, nature et tracé de la section dans le plan, équation de la surface de révolution d'axe (Oz) générée par cette ellipse) ;

— Exercice 19 (Courbes et surfaces de l'espace) : déterminer les courbes coordonnées d'une surface paramétrée, en déduire que la surface est réglée, coordonnées des projetés orthogonaux d'un point fixe sur les droites génératrices, montrer que la courbe décrite par ces projetés est une ellipse dans un plan incliné par un changement de repère ;

— **À faire :** travailler le cours et chercher l'exercice 20 du TD16 (surfaces), finir le DM11 pour le 28/03.

Le 28/03/25, cours + TD : 2h + 2h

— Correction de l'exercice 20 (Courbes et surfaces de l'espace) : déterminer un paramétrage et une équation cartésienne d'une surface réglée connaissant les génératrices ;

— Cours (Équations différentielles linéaires) : équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1, méthode de résolution, exemples avec recollements, point méthode ; définition d'une EDL scalaire d'ordre 2 à coefficients constants, résolution de l'équation homogène, structure de l'ensemble des solutions, unicité de la solution à un problème de Cauchy, principe de superposition, recherche de solutions particulières si le second membre est une exponentielle ou trigonométrique, exemples ; EDL scalaire d'ordre 2 à coefficients variables, théorème de Cauchy linéaire, structure de l'ensemble des solutions, résolution dans le cas où on connait une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas, exemple (recherche des solutions DSE d'une EDL homogène, puis de toutes les solutions par variation de la constante) ;

— Exercice $18-24$ (Courbes et surfaces de l'espace) : vérifier qu'un point appartient à l'intersection $\mathcal{C}$ de deux quadriques et déterminer des équations cartésiennes de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point, déterminer en tout point régulier de $\mathcal{C}$ un vecteur directeur de la tangente, montrer que la courbe intersection de deux quadriques est la réunion de deux courbes planes et déterminer sa projection orthogonale sur (xOz) ; paramétrage d'une surface générée par les tangente à une courbe paramétrée, déterminer l'ensemble de ses points critiques, une équation du plan tangent en chaque point régulier, montrer que les points régulier d'une même génératrice ont le même plan tangent ;

— **À faire :** chercher l'exercice 25 du TD16 (surfaces) pour le 31/03.

24 Semaine du 31/03/2025 au 06/04/2025

Le 31/03/25**, TD :** 2**h.**

— Correction de l'exercice 25 (Courbes et surfaces de l'espace) : projection orthogonale d'une courbe définie par deux équations cartésienne (section d'une quadrique et d'un plan) sur les plans de coordonnées, intersections avec les plans de coordonnées, équation cartésienne de la surface de révolution obtenue par rotation de cette courbe autour de l'axe (Oz), point méthode (avec un paramétrage ou avec les équations cartésiennes) ;

— Exercice 26 (Courbes et surfaces de l'espace) : équation cartésienne d'un cône de sommet O d'axe (Oz) de demi-angle au sommet α, équation d'un cône de sommet, d'axe et de demi-angle donné par un changement de repère, montrer qu'une courbe est tracée sur un cône de sommet O et d'axe (Oz) ;

— **À faire :** travailler le cours et chercher les exercices 3 (la fin) $4-5$ du cours (équations différentielles) pour le 01/04.

Le 01/04/25**, cours :** 2**h.**

— Cours (Équations différentielles linéaires) : montrer qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène admet des solutions non DSE, trouver toutes les solution par variation de la constante ; résolution d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants, par variation de la constante ; résolution d'une EDL d'ordre 2 à coefficients variables, par un changement de variable ;

— Exercices $8-10$ (Équations différentielles linéaires) : montrer qu'une application linéaire induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, donne sa matrice dans la base canonique, en déduire qu'il est diagonalisable, puis les solutions polynomiales d'une EDL2 à coefficients variables ; pour une suite définie par une relation de récurrence, justifier un encadrement de ses termes, en déduire le rayon de convergence de la série entière associée, une équation différentielle vérifiée par sa somme et l'expression de cette somme.

— **À faire :** réviser le concours et réussir le mieux possible.

25 Conseils pour réviser le concours

Pour toutes les matières : faire un planning. Si un jour vous ne pouvez pas le respecter, essayez de planifier ce qui n'a pas été fait les jours suivants ou la dernière semaine. **Prévoir des moments de détente et de repos, surtout la veille des épreuves**. Pensez à consulter le **planning des épreuves écrites** (page 9 de la notice de la banque PT) avant d'organiser votre planning de révision.

Pour les maths : pour chacune des parties suivantes, bien apprendre le formulaire, les définitions, les propriétés, les théorèmes, retravailler les démonstrations et exercices du cours en passant vite sur ce que vous maîtrisez déjà. Ensuite, vous pouvez approfondir en reprenant (**par ordre de priorité**) les DS, les DM (**avec les copies corrigées**), puis les exercices de TD que je vous suggère de reprendre, toujours en passant vite sur ce que vous maîtrisez déjà parfaitement.

Analyse :

1. Chapitres $1-3-4$: Problème d'Analyse du DS1, Problème d'Analyse du DS2, Problèmes $2-3$ du DM1, Problèmes $2-3$ du DM3, Problèmes $1-2-3$ du DM4 ;
2. Chapitres $9-10$: Problème d'Analyse du DS3, Problème d'Analyse du DS4 (CBI), Problèmes $2-3$ du DM8, Problème 1 du DM9, exercices $1-10-17(1.)-18$ du TD9, exercices $4(1.)-6-8-12-18$ du TD10 ;
3. Chapitre $14-17$: Problème d'Analyse du DS6, Problème 1 du DM11, exercices $11-13-16-20-21$ du TD14, exercices $8-9$ du TD17 ;

Algèbre linéaire :

1. Chapitres $5-6-7$: Problème d'Algèbre du DS2, Exercice d'Algèbre du DS3, Problèmes $1-2-3$ du DM5, Problèmes $1-2$ du DM6, exercices $7-8-13-21-27$ du TD5, exercices $3-4-13$ du TD6, exercices $5-9-10-12-17-23$ du TD7 ;
2. Chapitres $11-12$: Problème d'Algèbre du DS5 (CBII), Problème 2 du DM9, Problèmes $1-2$ du DM10, exercices $4-7-8-9-12-13-19$ du TD11, exercices $1-2-4-5-7-8-9-18-21-22$ du TD12 ;

Probabilités :

1. Chapitres $8-13$: Exercice de Probabilités du DS3, Problème de Probabilités du DS5 (CBII), Problème 3 du DM6, Problèmes $1-2-3$ du DM7, Problème 3 du DM10, exercices $3-6-7-8-16-18-22$ du TD8, exercices $6-7-13-14-15-16-17-18-19$ du TD13 ;

Géométrie :

1. Chapitres $0-2$: Problème de Géométrie du DS1, Problème de Géométrie du DS4 (CBI), Problèmes $1-2-3$ du DM2, exercices $2-3-5-8-10-11-19$ du TD2 ;
2. Chapitres $15-16$: Problème de Géométrie du DS6, Problèmes $2-3$ du DM11, exercices $8-11-13-16-20-21$ du TD15, exercices $2-3-5-8-10-11-16-18-19-20-24-25-26$ du TD16.

Cette liste d'exercices est non exhaustive, mais déjà importante. Vous pouvez, si vous le souhaitez et si vous avez le temps, travailler plus d'exercices de TD et des sujets de la banque PT.

Petite sélection :

- Banque PT Maths C [2018] - [correction], [2022] - [correction] ;
- Banque PT Maths A [2021] - [correction], [2024] - [correction] ;
- Banque PT Maths B [2019] - [correction], [2020] - [correction], [2021] - [correction].